

Expectativa Adaptada e Ajustamento Parcial: Identificação e Discriminação entre os Dois Processos*

Fernando de Holanda Barbosa[†]

Abstract

É bastante comum encontrar-se na literatura afirmações dizendo ser impossível estimar os coeficientes de ajustamento e de expectativa quando ambos os processos estão presentes no modelo em estudo. Este trabalho mostra que esta afirmativa depende das hipóteses que se faça com relação à parte estocástica do modelo. Além disto, um teste é apresentado com a finalidade de verificar se os coeficientes de expectativa e de ajustamento são identificados. Um exemplo é apresentado usando o modelo de hiperinflação de Cagan para a Alemanha. Os resultados corroboram a hipótese de Cagan quanto ao ajustamento instantâneo, todavia o processo auto-regressivo é do tipo explosivo.

1. Introdução; 2. Expectativa adaptada versus ajustamento parcial; 3. Especificações alternativas; 4. Aplicação à demanda de moeda especificada por Cagan; 5. Conclusão

1 Introdução

Admitamos que o valor desejado y_t^d , da variável y_t seja uma função linear do valor esperado, X_t^e , da variável X_t , de acordo com a equação:

$$y_t^d = \alpha + \beta X_t^e + \varepsilon_{1t} \quad (1)$$

onde ε_{1t} é uma variável aleatória a ser especificada mais adiante.

O valor desejado y_t e o valor esperado X_t não são observáveis. Portanto, a equação (1) não pode ser estimada sem que sejam formuladas hipóteses que relacionem estas variáveis a outras que sejam observáveis. Entre as especificações

** O autor agradece os comentários de Milton de Assis, Claudio Contador, Clovis de Faro, Maria da Conceição Silva e a Luiz Fernando Leite Timbó os trabalhos de computação relatados no item 4 deste trabalho.

[†]** Do Instituto de Pesquisas do IPEA

mais populares das variáveis X_t^e e y_t^d temos, respectivamente, os mecanismos de expectativa adaptada e de ajustamento parcial.

O mecanismo de expectativa adaptada admite que o processo de formação de expectativa é descrito por:¹

$$X_t^e = \frac{1-\lambda}{1-\lambda L} X_t, \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad (2)$$

onde L é o operador de defasagem: $L^i Z_t = Z_{t-i}$.²

O mecanismo de ajustamento parcial, por sua vez, é descrito pela equação:³

$$y_t = \frac{1-\delta}{1-\delta L} y_t^d, \quad 0 \leq \delta < 1 \quad (3)$$

Combinando as equações estruturais (1)(2) e (3) obtemos a forma reduzida do modelo:

$$y_t = \alpha(1-\lambda)(1-\delta) + (\lambda+\delta)y_{t-1} - \lambda\delta y_{t-2} + \beta(1-\delta)(1-\lambda)X_t + u_t - \lambda u_{t-1} \quad (4)$$

onde $u_t = (1-\delta)\varepsilon_{1t}$.

Quando $\delta = 0$ e $0 \leq \lambda < 1$ temos apenas o mecanismo de expectativa adaptada, e a equação (4) reduz-se a:

$$y_t = \alpha(1-\lambda) + \lambda y_{t-1} + \beta(1-\lambda)X_t + \varepsilon_{1t} - \lambda\varepsilon_{1,t-1} \quad (5)$$

Por outro lado, quando $\lambda = 0$ e $0 \leq \delta < 1$, obtemos a partir de(4) a forma reduzida do modelo que contém apenas o mecanismo de ajustamento parcial:

$$y_t = \alpha(1-\delta) + \delta y_{t-1} + \beta(1-\delta)X_t + u_t \quad (6)$$

Imaginemos agora que o pesquisador faça a seguinte regressão:

$$y_t = a_o + a_1 y_{t-1} + a_2 X_t + e_t \quad (7)$$

onde os coeficientes a_o , a_1 e a_2 são as estimativas de mínimos quadrados ordinários da regressão de y_t com y_{t-1} e X_t , sendo e_t o resíduo da regressão. Obviamente, a partir do conhecimento destes coeficientes, é impossível identificar se o modelo estimado é dado por (5) ou (6). De outro lado, encontra-se na literatura econométrica a afirmação de que é impossível, a partir da equação em forma reduzida (4) estimar-se separadamente os parâmetros λ e δ , tendo em vista que, não se levando em conta a parte aleatória que envolve os erros u_t , estes

¹O mecanismo de expectativa adaptada foi proposto por Cagan (1956).

²Seria mais natural especificar (2) como $X_t^e = (1-\lambda)/(1-\lambda L)X_{t-1}$ porque X_t não é conhecida no momento em que a expectativa para o período t é formada. Entretanto, trocar X_t por X_{t-1} em (2) não altera em nada a nossa análise.

³O mecanismo de ajustamento parcial foi introduzido por Nerlove (1956).

parâmetros entram simetricamente na expressão (4).⁴ O objetivo deste trabalho é o de mostrar que a validade desta afirmação depende da formação dos erros u_t ; isto é, provamos a seguir que, dentro de certas hipóteses quanto a parte aleatória da equação (4), é perfeitamente possível identificar e conseqüentemente estimar os parâmetros λ e δ .

O restante deste trabalho está organizado da seguinte maneira. O item 2 analisa diferentes hipóteses quanto ao processo estocástico que gera u_t , e mostra em que casos é possível identificar separadamente os parâmetros dos mecanismos de expectativa adaptada e de ajustamento parcial. O item 3 cuida de especificações alternativas, quanto à parte estocástica, das equações estruturais do modelo, bem como discute hipóteses alternativas, quanto à parte estocástica, das equações estruturais do modelo, bem como discute hipóteses alternativas em relação às condições iniciais do mesmo. O item 4 apresenta um exemplo onde aplicamos os resultados obtidos na segunda seção. Finalmente, o item 5 sumariza as principais conclusões deste trabalho.

2 Expectativa adaptada versus ajustamento parcial

Com a finalidade de demonstrar sob que condições os parâmetros λ e β na equação (4) são identificados, consideraremos quatro distintas hipóteses quanto à variável aleatória u_t .⁵ Estas hipóteses são:

Hipótese 1: $u_t - \lambda u_{t-1} = \varepsilon_{2t}$; ε_{2t} sendo uma variável normal com média zero e variância σ^2 ; isto é: $\varepsilon_{2t} \in N(0, \sigma^2)$. As variáveis ε_{2t} e $\varepsilon_{2t'}$, são independentes para $t \neq t'$.

Hipótese 2: u_t apresenta uma distribuição $N(0, \sigma^2)$, e u_t e $u_{t'}$ são independentes para $t \neq t'$.

Hipótese 3: $u_t = p^{u_{t-1}} + \varepsilon_{3t}$, $\varepsilon_{3t} \in N(0, \sigma^2)$, ε_{3t} e $\varepsilon_{3t'}$, são independentes para $t \neq t'$.

Hipótese 4: $u_t - \lambda u_{t-1} = \theta(u_{t-1} - \lambda u_{t-2}) + \varepsilon_{4t}$, $\varepsilon_{4t} \in N(0, \sigma^2)$, ε_{4t} e $\varepsilon_{4t'}$, são independentes para $t \neq t'$.

É interessante observar que a terceira hipótese coincide com a primeira no caso de $\rho = \lambda$. Quando $\rho = 0$ a terceira hipótese é idêntica à segunda, e, se $\theta = 0$, a quarta hipótese reduz-se à primeira.

⁴Por exemplo, Johnston (1972, p.303) afirma que "the parameter $[\lambda]$ and $[\delta]$ enter [4] symmetrically so that it is impossible to obtain estimates of their separate values from the regression coefficients. One can, however, estimate $[\lambda + \delta]$, $[\lambda\delta]$ and hence α and β ". Feige (1967, p.462-473), afirma na página 464 que: "Since equation [5] and [6] contain the same observed variables, one cannot discriminate between the simple adaptive expectation process and the partial adjustment process, except insofar as the disturbance terms differ. When both processes are operative, the reduced equation [4] is relevant: however, one cannot, on the basis of knowledge of the reduced equation coefficients, identify λ_γ , γ and β [λ , δ e β na nossa notação] separately."

⁵As quatro hipóteses consideradas aqui são as usadas por Zellner e Geisel (1970, p.865-88).

Cuidemos agora da análise de cada uma das hipótese que acabamos de explicitar.

2.1 Hipótese 1

De acordo com a primeira hipótese a equação (4) passa a ser escrita como:

$$y_t = \alpha(1 - \lambda)(1 - \delta) + (\lambda + \delta) y_{t-1} - \lambda\delta y_{t-2} + \beta(1 - \lambda)(1 - \delta)X_t + \varepsilon_{2t} \quad (8)$$

Neste caso é impossível estimar-se os parâmetros λ e δ separadamente, pois que estes não podem ser identificados a partir da equação(8).⁶

Com efeito, a função de densidade de probabilidade para a amostra y_1, y_2, \dots, y_T , dadas as observações y_o e y_{-1} é expressa por:

$$p(y_1, y_2, \dots, y_T / y_o, y_{-1}) = (\sqrt{2\pi} \sigma)^{-T} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \right\} \quad (9)$$

$$\sum_{t=1}^T [y_t - \alpha(1 - \lambda)(1 - \delta) - (\lambda + \delta) y_{t-1} + \lambda\delta y_{t-2} - \beta(1 - \lambda)(1 - \delta)X_t]^2$$

A conclusão de que λ e δ não são identificados é imediata a partir de (9).

É interessante observar que a primeira hipótese admite que a variável aleatória u_t segue um processo auto-regressivo de primeira ordem, cujo coeficiente de auto-regressão é justamente igual ao parâmetro λ do mecanismo de expectativa adaptada. Sem dúvida, não existe nenhuma razão para que, a priori, admita-se tal coincidência.

2.2 Hipótese 2

Admitindo que o erro u_t segue o processo estocástico descrito na segunda hipótese, a equação (4) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\eta_t = \lambda\eta_{t-1} + \alpha(1 - \lambda)(1 - \delta) + \delta(y_{t-1} - \lambda y_{t-2}) + \beta(1 - \lambda)(1 - \delta)X_t \quad (10)$$

onde:

$$\eta_t = y_t - u_t$$

De (10) temos que:

$$\eta_{t-1} = \lambda\eta_{t-2} + \alpha(1 - \lambda)(1 - \delta) + \delta(y_{t-2} - \lambda y_{t-3}) + \beta(1 - \delta)(1 - \lambda)X_{t-1} \quad (11)$$

Multiplicando por λ a equação acima e substituindo-se este resultado em (10) obtemos:

⁶O problema de identificação existe quando um dado conjunto de observações y pode ser gerado por diferentes funções de probabilidade, isto é, $p(y/\theta) = p(y/\phi)$, onde ϕ e θ são parâmetros diferentes. Neste caso, não se pode discernir a partir da amostra qual dos dois modelos está gerando as observações y . O modelo é dito não identificado e os parâmetros não são identificados. Para uma explicação mais detalhada veja, por exemplo, Zellner (1971, p. 253-8).

$$\begin{aligned}\eta_t &= \lambda^2 \eta_{t-2} + \alpha(1-\delta)(1-\lambda) + (1+\lambda) + \delta(y_{t-1} - \lambda^2 y_{t-3}) + \\ &\quad + \beta(1-\delta)(1-\lambda)(X_t + \lambda X_{t-1})\end{aligned}\quad (12)$$

Procedendo, sucessivamente, da mesma maneira pela qual (12) foi obtida, temos:

$$\begin{aligned}\eta_t &= \eta_0 \lambda^t + \alpha(1-\delta)(1-\lambda)(1+\lambda+\dots+\lambda^{t-1}) + \delta(y_{t-1} - \lambda^t y_{t-1}) + \\ &\quad + \beta(1-\delta)(1-\lambda)(X_t + \lambda X_{t-1} + \dots + \lambda^{t-1} X_1)\end{aligned}\quad (14)$$

Observando que $1+\lambda+\dots+\lambda^{t-1} = (1-\lambda^t)/(1-\lambda)$ e que $y_t = \eta_t + u_t$ a equação (13) transforma-se em:

$$y_t = \alpha(1-\delta) + [\eta_0 - \alpha(1-\delta)] X_{1t} + \delta X_{2t} + \beta(1-\delta) X_{3t} + u_t \quad (15)$$

onde $\eta_0 = y_0 - u_0$ é um novo parâmetro que reflete condições iniciais no modelo e:

$$\begin{aligned}X_{1t} &= \lambda^t \\ X_{2t} &= y_{t-1} - \lambda^t y - 1 \\ X_{3t} &= (1-\lambda) [X_t + \lambda X_{t-1} + \dots + \lambda^{t-1} X_1]\end{aligned}\quad (16)$$

A função de densidade de probabilidade associada ao modelo (2.7) para a amostra de tamanho T, y_1, y_2, \dots, y_T , condicionada aos valores de y_0 e y_{-1} , é:

$$p(y_1, y_2, \dots, y_T / y_0, y_{-1}) = (\sqrt{2\pi} \sigma)^{-T} \quad (17)$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T [y_t - \alpha(1-\delta) - (\eta_0 - \alpha(1-\delta)) X_{1t} - \delta X_{2t} - \beta(1-\delta) X_{3t}]^2 \right\}$$

Da equação acima concluímos que os parâmetros $\alpha, \beta, \lambda, \delta$ e σ são identificados. O logaritmo da função de verossimilhança é:

$$\log l(\alpha, \beta, \lambda, \delta, \sigma / \text{observações}) = \text{constante} - \frac{T}{2} \log \sigma^2$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \{y_t - \alpha(1-\delta) - [\eta_0 - \alpha(1-\delta)] X_{1t} - \delta X_{2t} - \beta(1-\delta) X_{3t}\}^2 \quad (18)$$

Utilizando o processo proposto por Zellner,¹ podemos estimar os parâmetros $\alpha, \beta, \lambda, \delta$ e σ . Com efeito, desde que λ está compreendido entre zero e um, tomamos valores arbitrários de λ neste intervalo e construímos, para cada valor

¹Zellner, A. & Geisel, M.S., op. cit.

de λ , as variáveis X_{1t}, X_{2t} e X_{3t} , as quais dependem de λ na forma explicitada em (16). Com estes valores, fazemos a regressão:

$$y_t = a_0 + a_1 X_{1t} + a_2 X_{2t} + a_3 X_{3t} + e_t \quad (19)$$

Para cada regressão temos a soma dos quadrados dos resíduos associada ao valor de λ usado. Segue-se, de (18), que o valor de λ que fornece a menor soma dos quadrados dos resíduos é o valor de λ que maximiza a função de verossimilhança, e os correspondentes valores de a_0, a_1, a_2 e a_3 são as estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de (15). É imediata, então, a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros de α, β e δ

Os intervalos de confiança e os testes de hipóteses para λ podem ser construídos usando-se a propriedade de que, para grandes amostras, menos duas vezes o logaritmo da razão de máxima verossimilhança segue uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade, isto é:²

$$-2 \log \frac{l(\lambda)}{l(\hat{\lambda})} = X^2(1) \quad (20)$$

onde $\hat{\lambda}$ é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro λ .

2.3 Hipótese 3

Na condição de que u_t segue um processo auto-regressivo de primeira ordem, cujo coeficiente de auto-regressão é ρ , a equação (4), subtraída da mesma equação defasada de um período e multiplicada por ρ , nos dá:

$$\begin{aligned} y_t - \rho y_{t-1} &= \alpha(1-\lambda)(1-\delta)(1-\rho) + (\lambda+\delta)[y_{t-1} - \rho y_{t-2}] - \quad (21) \\ &\quad - \lambda\delta[y_{t-2} - \rho y_{t-3} + \beta(1-\delta)(1-\lambda)[X_t - \rho X_{t-1}] \\ &\quad + (u_t - \rho u_{t-1}) - \lambda(u_{t-1} - \rho u_{t-2}) \end{aligned}$$

Tendo em vista que $u_t - \rho u_{t-1} = \epsilon_{3t}$, a equação (21) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} y_t - \rho y_{t-1} - \epsilon_{3t} &= \alpha(1-\lambda)(1-\delta)(1-\rho) + \lambda(y_{t-1} - \rho y_{t-2} - \epsilon_{3t-1}) + \\ &+ \delta[y_{t-1} - \rho y_{t-2} - \lambda(y_{t-2} - \rho y_{t-3})] + \beta(1-\delta)(1-\lambda)(X_t - \rho X_{t-1}) \quad (22) \end{aligned}$$

Denominando agora por η_t a expressão $y_t - \rho y_{t-1} - \epsilon_{3t}$, isto é:

$$\eta_t = y_t - \rho y_{t-1} - \epsilon_{3t}$$

e procedendo da mesma forma que em (9) obtemos:

$$\begin{aligned} y_t - \rho y_{t-1} &= \alpha(1-\delta)(1-\rho) - [\eta_0 - \alpha(1-\delta)(1-\rho)] \lambda^t + \quad (23) \\ &\quad + \delta[y_{t-1} - \rho y_{t-2} - \lambda^t(y_{-1} - \rho y_{-2})] + \\ &\quad + \beta(1-\delta)(1-\lambda)[(X_t - \rho X_{t-1}) + \lambda(X_{t-1} - \rho X_{t-2}) + \dots + \\ &\quad + \lambda^{t-1}(X_1 - \rho X_0)] + \epsilon_{3t} \end{aligned}$$

²Para uma prova deste teorema veja, por exemplo, Theil (cap. 8 e especialmente p. 396-7).

Adotando uma notação mais simplificada para escrever(23), temos:

$$y_t - \rho y_{t-1} = \alpha(1 - \delta)(1 - \rho) + [\eta_0 - \alpha(1 - \delta)(1 - \rho)]X_{1t} + \delta X_{2t} + \beta(1 - \delta)X_{3t} + \varepsilon_{3t} \quad (24)$$

onde:

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \lambda^t \\ X_{2t} &= y_{t-1} - \rho y_{t-2} - \lambda^t(y_{-1} - \rho y_{-2}) \\ X_{3t} &= (1 - \lambda)[(X_t - \rho X_{t-1}) + \lambda(X_{t-1} - \rho X_{t-2}) + \dots + \lambda^{t-1}(X_1 - \rho X_0)] \end{aligned} \quad (25)$$

A função de densidade de probabilidade de y_1, y_2, \dots, y_T , condicionadas aos valores de y_0, y_{-1} e y_{-2} , é expressa por:

$$\begin{aligned} p(y_1, y_2, \dots, y_T / y_0, y_{-1}, y_{-2}) &= (\sqrt{2\Pi\sigma})^{-T} \\ &\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T [y_t - \rho y_{t-1} - \alpha(1 - \delta)(1 - \rho) - \right. \\ &\quad \left. - [\eta_0 - \alpha(1 - \delta)(1 - \rho)] X_{1t} - \delta X_{2t} - \beta(1 - \delta)X_{3t}]^2\right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Obviamente, desde que $\rho \neq \lambda$, podemos concluir, a partir de (26), que os parâmetros δ e λ são identificados. Segue-se, então, que neste caso é importante testar a hipótese numa $H_0 : \rho = \lambda$ contra a alternativa $H_1 : \rho \neq \lambda$. Este teste pode ser efetuado usando-se a distribuição qui-quadrado, como vemos a seguir.

O logaritmo da função de verossimilhança associada com a função de densidade de probabilidade (26) é dado por:

$$\begin{aligned} \log l(\alpha, \beta, \delta, \lambda, \rho, \sigma / \text{observações}) &= \\ \text{constante} - \frac{T}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T [y_t - \rho y_{t-1} - \\ - \alpha(1 - \delta)(1 - \rho) - [\eta_0 - \alpha(1 - \delta)(1 - \rho)] X_{1t} - \delta X_{2t} - \beta(1 - \delta)X_{3t}]^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Tendo em vista que $-\infty < \rho < \infty$, pois o processo auto-regressivo pode ser explosivo ($|\rho| > 1$) ou não ($|\rho| < 1$), e que $0 < \lambda < 1$, para cada par de valor (ρ, λ) localizado nesta região fazemos a regressão:

$$y_t(\rho) = a_0 + a_1 X_{1t} + a_2 X_{2t} + a_3 X_{3t} + e_t \quad (28)$$

onde

$$y_t(\rho) = y_t - \rho y_{t-1}$$

As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros a_0, a_1, a_2, a_3 e λ serão aqueles valores que tornam mínima a soma dos quadrados dos resíduos da regressão (2.20). É imediata, então, a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros α, β, δ e η_0 . Baseados mais uma vez no fato de que $-2 \log[l(\lambda, \rho)/l(\hat{\lambda}, \hat{\rho})]$ (onde $\hat{\lambda}$ e $\hat{\rho}$ são os estimadores de máxima verossimilhança), é distribuída de acordo com uma distribuição qui-quadrado.

Podemos testar a hipótese de que $\rho = 1$ e construir intervalos de confiança para ρ e λ . Analogamente, poderíamos testar a hipótese de que $\rho = 0$.

2.4 Hipótese 4

A equação (4) defasada de um período e multiplicada por θ é igual a :

$$\begin{aligned} \theta y_{t-1} = & \alpha(1-\lambda)(1-\delta)\theta + \theta(\lambda+\delta)y_{t-2} - \theta\lambda\delta y_{t-2} + \\ & + \theta\beta(1-\delta)(1-\lambda)X_{t-1} + \theta u_{t-1} - \theta\lambda u_{t-2} \end{aligned} \quad (29)$$

A equação (29) subtraída de (4) resulta em:

$$\begin{aligned} y_t - \theta y_{t-1} = & \alpha(1-\lambda)(1-\delta)(1-\theta) + (\lambda+\delta)(y_{t-1} - \theta y_{t-2}) - \\ & - \lambda\delta(y_{t-2} - \theta y_{t-3}) + \beta(1-\delta)(1-\lambda)(X_t - \theta X_{t-1}) + \varepsilon_{4t} \end{aligned} \quad (30)$$

Na obtenção da equação acima levamos em conta o fato de que, na quarta hipótese, admitimos

$$\varepsilon_{4t} = (u_t - \lambda u_{t-1}) - \theta(u_{t-1} - \lambda u_{t-2}).$$

Não é necessário escrever a função de densidade de probabilidade correspondente à equação (30) para perceber que os parâmetros λ e δ , neste caso, não são identificados. Todavia, a hipótese nula de que $\theta = 0$ poderia ser realizada, empregando-se para tal finalidade a distribuição qui-quadrado.

3 Especificações alternativas

O modelo formulado através das equações (1), (2) e (3) pode ter especificações alternativas quanto à parte estocástica. Em princípio, não existe nenhuma razão para que apenas a equação (1) contenha uma parte aleatória. No que se segue, consideramos modelos cuja parte estocástica está ligada às equações (3) e (2). Não é nosso propósito exaurir todas as possibilidades quanto à formulação da parte estocástica dos modelos de ajustamento parcial e expectativa adaptada. Contudo, pretendemos sugerir como a análise do item 2 pode ser estendida para diferentes especificações que o pesquisador julgue mais adequada no seu estudo.

Consideramos, ainda, nesta seção, o problema da especificação das condições iniciais do modelo e sugerimos, também, uma abordagem bayesiana para a identificação e discriminação entre os mecanismos de expectativa adaptada e de ajustamento parcial.

3.1 Erro na equação de ajustamento parcial

A equação (1) é agora considerada como uma relação exata entre a variável desejada y_t^d e a variável esperada X_t^e :

$$y_t^d = \alpha + \beta X_t^e \quad (31)$$

A equação de expectativa permanece como em (2) e o mecanismo de ajustamento parcial passa a ser especificado do seguinte modo:

$$y_t = \frac{(1-\delta)}{(1-\delta L)} y_t^d + \xi_{1t} \quad (32)$$

Combinando as equações (31), (32) e (2) obtemos a forma reduzida do modelo:

$$y_t = \alpha + \frac{\beta(1-\delta)(1-\lambda)}{(1-\delta L)(1-\lambda L)} X_t + \xi_{1t} \quad (33)$$

Na hipótese da variável aleatória ξ_{1t} ter uma distribuição normal e ξ_{1t} e ξ_{1t} , serem independentes para $t \neq t$, é fácil de concluir que, neste caso, os parâmetros δ e λ não são identificáveis. Obviamente, esta conclusão pode ser mudada se outras hipóteses acerca de ξ_{1t} forem julgadas mais adequadas ao modelo em estudo.

A equação do mecanismo de ajustamento parcial (32) poderia ser reformulada de acordo com a especificação:

$$y_t = \delta y_{t-1} + (1-\delta) y_t^d + \xi_{1t} \quad (34)$$

A equação(34) é equivalente à equação (33) quando:

$$\xi_{1t} = \frac{\xi_{1t}}{1-\delta L} \quad (35)$$

A equação da forma reduzida do modelo, obtida combinando-se (34), (31), e (2), é:

$$y_t = \alpha + \frac{\beta(1-\delta)(1-\lambda)}{(1-\delta L)(1-\lambda L)} X_t + \frac{\xi_{1t}}{1-\delta L} \quad (36)$$

Obviamente, quando (35) é válida, a conclusão quanto à identificação de λ e δ é idêntica à que chegamos para (33). A análise de (36) é similar àquela que fizemos no segundo item deste trabalho, notando-se para isso que, a partir de (36), podemos escrever:

$$y_t = \alpha(1-\lambda)(1-\delta) + (\lambda + \delta) y_{t-1} - \lambda \delta y_{t-2} + \beta(1-\delta)(1-\lambda) X_t + \xi_{1t} - \lambda \xi_{1t-1} \quad (37)$$

e desde que se faça $u_t = \xi_{1t}$, a equação (37) coincide com (4).

3.2 Erro na equação de expectativa

Na hipótese de o erro estar ligado à equação de expectativa temos a equação (2) substituída por:

$$X_t^e = \frac{1-\lambda}{1-\lambda L} X_t + \omega_{1t} \quad (38)$$

A equação de ajustamento parcial continua sendo dada por (3) e a equação que liga y_t^d e X_t^e é expressa por (31). Combinando estas três equações - (38), (31) e (3) - obtemos a forma reduzida:

$$y_t = \alpha + \frac{\beta(1-\delta)(1-\lambda)}{(1-\delta L)(1-\lambda L)} X_t + \frac{(1-\delta) \omega_{1t}}{(1-\delta L)} \quad (39)$$

Quando ω_{1t} e ω_{1t} são independentes, e ω_{1t} é normalmente distribuída, a equação (39) corresponde ao modelo analisado no subitem 2.2 que trata da hipótese 2. Portanto, com esta hipótese acerca de ω_{1t} , os parâmetros λ e δ são identificados.

3.3 Condições iniciais do modelo

As funções de densidade de probabilidade (9), (17) e (26) são condicionadas aos valores iniciais do modelo, de uma maneira geral y_0, y_{-1} e y_{-2} . A distribuição conjunta de $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_T$ tem uma densidade de probabilidade que é expressa por:

$$p(y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_T / y_{-2}, y_{-1}, y_0) \quad (40)$$

É portanto, fácil de concluir, com base na expressão acima, que a distribuição conjunta depende das hipóteses que se faça em relação à densidade marginal $p(y_2, y_{-1}, y_0)$, de y_{-2}, y_{-1}, y_0 . Se, por exemplo, esta densidade marginal não depender dos parâmetros do modelo - (1) (2) e (3) - os estimadores apresentados no subitem 2.1 não sofrem nenhuma modificação. Todavia, se este não for o caso, os resultados ali apresentados podem mudar. Com efeito, tomemos o caso em que o modelo descrito pelas equações (1) (2) e (3) esteja em operação num horizonte de tempo no passado bastante amplo e que, portanto, de acordo com (4), y_0 e y_{-1} sejam respectivamente dados por:

$$y_0 = \alpha(1 - \lambda)(1 - \delta) + (\lambda + \delta) y_{-1} - \lambda \delta y_{-2} + \beta(1 - \lambda)(1 - \delta) X_0 + u_0 - \lambda u_{-1} \quad (41)$$

$$y_{-1} = \alpha(1 - \lambda)(1 - \delta) + (\lambda + \delta) y_{-2} - \lambda \delta y_{-3} + \beta(1 - \lambda)(1 - \delta) X_{-1} + u_{-1} - \lambda u_{-2} \quad (42)$$

Admitindo como válida a hipótese 1 do item 2 e supondo que não dispomos de observações anteriores ao período -1, introduzimos os parâmetros ϕ_0 e ϕ_1 e reescrevemos (41) e (42) do seguinte modo:

$$y_0 = \phi_0 + \varepsilon_{20} \quad (43)$$

$$y_{-1} = \phi_1 + \varepsilon_{2,-1} \quad (44)$$

onde

$$\phi_0 = \alpha(1 - \lambda)(1 - \delta) + (\lambda + \delta) y_{-1} - \lambda \delta y_{-2} + \beta(1 - \lambda)(1 - \delta) X_0 \quad (45)$$

$$\phi_1 = \alpha(1 - \lambda)(1 - \delta) + (\lambda + \delta) y_{-2} - \lambda \delta y_{-3} + \beta(1 - \lambda)(1 - \delta) X_{-1} \quad (46)$$

A distribuição marginal de y_0, y_{-1} tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$p(y_0, y_{-1}) = (\sqrt{2\Pi}\sigma)^{-2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(y_0 - \phi_0)^2 + (y_{-1} - \phi_1)^2] \right\} \quad (47)$$

Combinando (47) e (9) obtemos a distribuição conjunta de $y_1, y_0, y_{-1}, \dots, y_T$:

$$p(y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots, y_T) = (\sqrt{2\Pi}\sigma)^{-(T+2)}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T [y_t - \alpha(1-\lambda)(1-\delta) - (\lambda+\delta)y_{t-1} + \lambda\delta y_{t-2} - \beta(1-\lambda)(1-\delta)X_t]^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(y_0 - \phi_0)^2 + (y_{-1} - \phi_1)]^2\right\} \quad (48)$$

Concluimos, a partir da equação acima, que os parâmetros λ e δ não podem ser identificados separadamente, e que os estimadores de máxima verossimilhança para o modelo expresso por (47) será diferente daquele dado por (9), pois ϕ_0 e ϕ_1 dependem de α, β, λ e δ .

Analogamente, poderíamos estender a análise acima para as demais hipóteses consideradas na segunda seção deste trabalho. Sem dúvida, os estimadores de máxima verossimilhança seriam muito mais complicados, porém os resultados quanto à discriminação entre os dois processos, mecanismo de ajustamento parcial *versus* expectativas adaptadas, permaneceriam os mesmos.

3.4 Análise bayesiana

Os ingredientes básicos da análise bayesiana são dois, a distribuição a priori e a função de verossimilhança, os quais combinados fornecem a distribuição a posteriori. Para exemplificar a aplicação da inferência bayesiana ao problema em estudo tomemos o caso correspondente à hipótese 3 do item 2. A função de verossimilhança é, então, obtida a partir de (26), considerando-se as observações como conhecidas e os parâmetros do modelo como incógnitas, isto é:

$$l(\alpha, \beta, \lambda, \delta, \rho, \eta_0, \sigma / \text{observações}, y_0, y_{-1}) \propto \sigma^{-T} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \{y_t - \rho y_{t-1} - \alpha(1-\delta)(1-\rho) - [\eta_0 - \alpha(1-\delta)(1-\rho)]X_{1t} - \delta X_{2t} - \beta(1-\delta)X_{3t}\}^2\right\} \quad (49)$$

onde X_{1t}, X_{2t} e X_{3t} são dados por (25).

Quanto à distribuição a priori, admitiremos uma distribuição do tipo difusa, não informativa, retratando a possível ou presumida ignorância do pesquisador a respeito dos parâmetros do modelo. A distribuição a priori será então dada pela função de densidade imprópria:

$$-\infty < \eta_0, \alpha, \beta < \infty$$

$$p(\alpha, \beta, \lambda, \delta, \rho, \sigma, \eta_0) \propto \frac{1}{\sigma}, \quad 0 < \sigma < \infty \quad (50)$$

$$0 < \lambda, \delta < 1$$

$$-\infty < \rho < \infty$$

Combinando as expressões (49) e (50) obtemos a distribuição a posteriori cuja função de densidade de probabilidade é:

$$p(\alpha, \beta, \lambda, \delta, \rho, \sigma, \eta_0 / \text{observações } y_0, y_{-1}) \propto \sigma^{-(T+1)}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \{y_t - \rho y_{t-1} - \alpha(1-\delta)(1-\rho) - [\eta_0 - \alpha(1-\delta)(1-\rho)]X_{1t} - \delta X_{2t} - \beta(1-\delta)X_{3t}\}^2\right\} \quad (51)$$

A expressão algébrica que aparece na parte exponencial da função de densidade acima pode ser escrita do seguinte modo:

$$\sum_{t=1}^T \{y_t - \rho y_{t-1} - \alpha(1-\delta)(1-\rho) - [\eta_0 - \alpha(1-\delta)(1-\rho)]X_{1t} - \delta X_{2t} - \beta(1-\delta)X_{3t}\}^2 = \nu s^2 + (\Phi - \hat{\Phi})' W' W (\Phi - \hat{\Phi})$$

onde a seguinte notação foi introduzida:

$$W = \{(1-\delta)(1-\rho)[1 - X_{1t}], X_{1t}(1-\delta)X_{3t}\}, \text{ uma matriz } 3 \times T$$

$$z_t = y_t - \rho y_{t-1} - \delta X_{2t} \quad (52)$$

$$\Phi' = [\alpha \eta_0 \beta], \text{ um vetor } 1 \times 3$$

Note-se que a matriz W bem como o vetor $z' = [z_1, \dots, z_T]$ dependem de λ, δ , e ρ . Os valores de $\hat{\phi}, s^2$ e ν são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= (W'W)^{-1} W'Z \\ s^2 &= \frac{(Z - W\hat{\Phi})'(Z - W\hat{\Phi})}{\nu} \\ \nu &= T - 3 \end{aligned} \quad (54)$$

Usando (54) e integrando (51) com respeito a σ obtemos a densidade marginal de $\alpha, \beta, \lambda, \delta, \rho$ e η_0 :

$$p(\alpha, \beta, \lambda, \delta, \rho, \eta_0 / \text{observações } y_0, y_{-1}) \propto [\nu s^2 + (\Phi - \hat{\Phi})' W' W (\Phi - \hat{\Phi})]^{-T/2} \quad (55)$$

É fácil de concluir, a partir da expressão acima, que a função de densidade α, β e η_0 , condicional aos valores de λ, δ e ρ , é do tipo multivariada Student-t. Usando propriedades desta distribuição integramos (55) com respeito a α, β e η_0 para obter a distribuição marginal de λ, δ e ρ , cuja densidade é:

$$p(\lambda, \delta, \rho / \text{observações } y_0, y_{-1}) \propto (s^2)^{-\frac{(T-3)}{2}} |W'W|^{-1/2} \quad (56)$$

A função de densidade de probabilidade (56) não tem uma forma conhecida e, portanto, requer integração numérica a três dimensões, explicitadas em (49), para que se calcule os momentos dos parâmetros λ, δ e ρ .

4 Aplicação à demanda de moeda especificada por Cagan

Em um trabalho clássico sobre hiperinflação em seis países europeus, Cagan especificou a demanda de moeda como sendo uma função da taxa de inflação esperada³

$$m_t = \alpha + \beta p_t^e + \varepsilon_{1t} \quad (57)$$

onde $m_t = \log(M_t/P_t)$, M_t é um índice da quantidade de moeda em circulação ao final de cada mês, P_t é um índice do nível geral de preços, também medido ao final de cada mês, e p_t^e é a taxa de inflação esperada. Cagan admitiu explicitamente que o ajustamento entre a caixa real desejada (m_t^d) e a caixa real atual (m_t) é instantâneo, ou seja $\delta = 0$. A taxa de inflação esperada segue o mecanismo descrito por (2) e a variável aleatória ε_{1t} além de serialmente independente tem uma distribuição normal. Em síntese, usando a classificação de hipóteses adotada no item 2 deste trabalho, Cagan admitiu implicitamente a hipótese 2 quanto à parte aleatória do seu modelo.

Como vimos anteriormente, a hipótese 2 é um caso particular da hipótese 3 quando $\rho = 0$. Sendo assim, estimaremos a equação (57) admitindo como hipótese mantida a hipótese 3, e não a 2, como fez Cagan. Desta forma, a hipótese de que $\rho = 0$ pode ser testada. Além disso, admitiremos que o ajustamento entre a caixa real desejada e a caixa real atual segue o mecanismo de ajustamento parcial, o que nos possibilita testar, a hipótese admitida a priori por cagan de que $\delta = 0$. devemos mencionar ainda o fato de que se o pesquisador achar conveniente, pode-se testar a hipótese de que $\rho = \lambda$, que se aceita, corresponderia à hipótese 1 do item 2.

A estimação da equação de demanda de moeda de Cagan, com as hipóteses adicionais introduzidas no parágrafo acima, pode ser efetuada usando-se a equação (29) e o procedimento indicado abaixo daquela equação. Todavia, por motivo de simplicidade computacional, embora ao custo de introduzir um pequeno erro nas variáveis, aplicaremos o método de Cochrane à equação (15). este método estima, então, os parâmetros da regressão.

$$y_t - \hat{p}y_{t-1} = \alpha(1 - \delta)(1 - \rho) + [\eta_0 - \alpha(1 - \delta)](X_{1t} - \hat{p}X_{1t-1}) + \delta(X_{2t} - \hat{p}X_{2t-1}) + \beta(1 - \delta)(X_{3t} - \hat{p}X_{3t-1}) + \varepsilon_t, \quad (58)$$

por um processo iterativo em relação ao coeficiente de autocorrelação ρ , sendo $\hat{\rho}$ a correlação obtida entre os resíduos da regressão. O procedimento adotado consiste, então, em calcular para diferentes valores de λ as variáveis X_{1t} , X_{2t} e X_{3t} de acordo com (16). de posse destes valores, fazemos a regressão (58), para cada valor de λ , e o método de Cochrane-Orcutt fornece o valor de ρ que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos.⁴

³Cagan, op.cit.

⁴Para a pesquisa com valores de ρ superiores a 1 inverte-se na equação acima dos índices t e $t-1$ e o coeficiente de auto-regressão obtido, digamos ρ^* , é igual ao inverso de $\rho (= 1/\rho^*)$.

A tabela 1 contém os resultados obtidos utilizando-se os dados para a Alemanha usados por Cagan ⁵ Para cada valor de λ compreendido no intervalo 0,01-0,99 efetuamos a regressão (58).⁶ A tabela 1 e a figura 1 mostram claramente que a menor soma dos quadrados dos resíduos corresponde ao valor de $\lambda = 0,91$, o qual é bastante inferior à soma dos quadrados dos resíduos associados ao valor de $\lambda = 0,01$. Portanto, para a amostra estudada o mínimo global da soma dos quadrados dos resíduos ocorre quando $\lambda = 0,91$, e as estimativas obtidas para esta regressão são (aproximadamente) as estimativas de máxima verossimilhança da equação (24). É interessante notar que o valor encontrado por Cagan para λ é de 0,82, um pouco inferior ao obtido com a metodologia desenvolvida neste trabalho. Quanto à estimativa do coeficiente de autocorrelação, o valor obtido é 2,04, que certamente difere do valor zero adotado a priori por Cagan, mostrando ainda que o processo auto-regressivo é explosivo.⁷ O coeficiente de expectativa δ estimado é bastante pequeno, tem o sinal contrário ao esperado e a hipótese de que este coeficiente é igual a zero é aceita, confirmando, portanto, a hipótese admitida por Cagan de que o ajustamento entre a caixa real desejada e a atual é instantâneo. A estimativa do coeficiente $\beta(1 - \delta)$ é igual a -6,880 e é bastante significativa. O valor de β por nós estimado quando se admite $\delta = 0$.

⁵Op.cit., p. 102.

⁶Entre os valores 0,10 e 0,90 trabalhamos com acréscimos de 0,10 enquanto nos demais intervalos adotamos acréscimos de 0,01.

⁷A estatística de Durbin-Watson para este valor de ρ é igual a 1,827 (veja tabela 1), indicando que o processo auto-regressivo removeu a correlação dos resíduos. Embora esta estatística não seja muito adequada ao nosso caso, a estatística h de Durbin indica, também, que a hipótese de não correlação dos resíduos é aceita.

Tabela 1
ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS DE DEMANDA DE MOEDA

ESPECIFICADA POR CAGAN PARA A HIPERINFLAÇÃO ALEMÃ

λ	ρ	Constante	$[\eta_{0-\alpha}(1-\delta)]$	δ	$\beta(1-\delta)$	SQR	R^2	D.W.
0,01	0,338	-0,510 (-2,671)	2,145 (0,112)	0,831 (13,897)	-0,451 (-5,957)	1,09324	0,9759	2,498
0,02	0,340	-0,514 (-2,675)	0,101 (0,010)	0,829 (13,779)	-0,454 (-5,938)	1,09817	0,9758	2,501
0,03	0,341	-0,518 (-2,679)	-0,578 (-0,089)	0,828 (13,661)	-0,458 (-5,919)	1,10317	0,9756	2,504
0,04	0,343	-0,522 (-2,683)	-0,913 (-0,187)	0,826 (13,544)	-0,462 (-5,900)	1,10820	0,9755	2,507
0,05	0,345	-0,526 (-2,687)	-1,114 (-0,284)	0,825 (13,427)	-0,466 (-5,882)	1,11316	0,9754	2,509
0,06	0,346	-0,531 (-2,629)	-1,246 (-0,378)	0,823 (13,310)	-0,470 (-5,863)	1,11816	0,9753	2,511
0,07	0,348	-0,535 (-2,696)	-1,338 (-0,470)	0,822 (13,195)	-0,474 (-5,845)	1,12311	0,9752	2,513
0,08	0,350	-0,539 (-2,701)	-1,407 (-0,560)	0,820 (13,079)	-0,478 (-5,826)	1,13811	0,9751	2,515
0,09	0,351	-0,544 (-2,705)	-1,459 (-0,648)	0,819 (12,963)	-0,483 (-5,808)	1,13315	0,9750	2,517
0,1	0,353	-0,548 (-2,710)	-1,498 (-0,735)	0,817 (12,849)	-0,487 (-5,790)	1,13805	0,9749	2,518
0,2	0,372	0,600 (-2,768)	-1,650 (-1,498)	0,798 (11,629)	-0,546 (-5,659)	1,18496	0,9738	2,535
0,3	0,386	-0,659 (-2,833)	-1,641 (-2,056)	0,778 (10,484)	-0,610 (-5,461)	1,24131	0,9726	2,526
0,4	0,409	-0,741 (-2,962)	-1,587 (-2,440)	0,747 (9,298)	-0,722 (-5,457)	1,27072	0,9720	2,506
0,5	0,420	-0,836 (-3,116)	-1,496 (-2,637)	0,711 (8,163)	-0,865 (-5,376)	1,30107	0,9713	2,461
0,6	0,438	-0,999 (-3,410)	-1,328 (-2,545)	0,649 (6,721)	-1,136 (-5,472)	1,30437	0,9712	2,399

λ	ρ	Constante	$[\eta_{0-\alpha}(1-\delta)]$	δ	-1,677	1,25118	0,9724	,307
0,7	0,458	-1,289	-1,018	0,536	-1,677	1,25118	0,9724	2,307
		(-3,968)	(-2,03 8)	(4,906)	(-5,833)			
0,8	0,477	-1,865	-0,399	0,309	-2,950	1,06852	0,9764	2,117
		(-5,133)	(0,809)	(2,475)	(-6,838)			
0,9	0,492	-2,808	0,569	-0,049	-6,345	0,78921	0,9826	1,908
		(-7028)	(1,147)	(-0,367)	(-8,899)			
0,91	0,491	-2,883	0,636	-0,074	-6,880	0,78604	0,9826	1,827
		(-6,835)	(1,232)	(-0,527)	(-8,664)			
0,92	0,492	-2,934	0,671	-0,092	-7,558	0,79699	0,9824	1,751
		(-6,695)	(1,261)	(-0,638)	(-8,577)			
0,93	0,489	-2,942	0,666	-0,0853	-8,128	0,82521	0,9818	1,657
		(-6,399)	(1,199)	(-0,579)	(-8,308)			
0,94	0,484	-2,927	0,633	-0,065	-8,764	0,86798	0,9808	1,574
		(-5,986)	(1,081)	(-0,430)	(-7,930)			
0,95	0,482	-2,898	0,581	-0,042	-9,755	0,92065	0,9797	1,513
		(-5,484)	(0,925)	(-0,268)	(-7,529)			
0,96	0,474	-2,852	0,514	0,0053	-10,859	0,98771	0,9782	1,477
		(-4,863)	(0,745)	(0,033)	(-7,009)			
0,97	0,464	-2,825	0,466	0,063	-12,619	1,06281	0,9765	1,475
		(-4,146)	(0,590)	(0,392)	(-6,452)			
0,98	0,450	-2,893	0,514	0,130	-16,139	1,14325	0,9748	1,4976
		(-3,312)	(0,521)	(0,794)	(-5,875)			
0,99	0,436	-3,389	0,991	0,198	-27,173	1,22068	0,9731	1,537
		(-2,304)	(0,623)	(1,207)	(-5,322)			

Notas: a) Os valores entre parênteses são as estatísticas "t" de Student.
b) SOR= Soma dos quadrados dos resíduos.
c) Os dados usados são os da Tabela B.3, Cagan, op.cit., p.102.

Com a finalidade de testar a hipótese nula $H_0 : \rho = \lambda$ contra a alternativa $H_1 : \rho \neq \lambda$ calculamos o valor de $\chi^2(1)$, que é igual a 6,83. Portanto, para este valor de χ^2 a hipótese nula é rejeitada a um nível de significância de 5%. Segue-se, então, que a hipótese 1 do item 2 não é adequada para o modelo em estudo.

5 Conclusão

A principal conclusão deste trabalho é de que é possível, dentro de certas condições, identificar e conseqüentemente discriminar entre os processos de expectativa adaptada e de ajustamento parcial. esta conclusão contradiz boa parte da literatura econométrica sobre o assunto.⁸

É importante observar que se a equação (1) tiver além da variável X_t^e outra variável exógena, o modelo contendo ajustamento parcial e expectativa adap-

⁸Veja, por exemplo, os trabalhos citados na nota de rodapé 4.

tada é então identificado, qualquer que seja a hipótese adotada para o erro aleatório do modelo. Com efeito, admitindo que o valor desejado de y_t seja agora especificado por:

$$y_t^e = \alpha + \beta X_t^e + \gamma Z_t + \varepsilon_{1t} \quad (59)$$

onde Z_t é uma variável exógena, e que os mecanismos de expectativa adaptada e de ajustamento parcial sejam dados respectivamente por (2) e (3), obtemos a seguinte equação em forma reduzida do modelo:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \alpha(1 - \delta)(1 - \lambda) + \delta(y_{t-1} - \lambda y_{t-2}) + \beta(1 - \delta)(1 - \lambda) X_t + \gamma(1 - \delta)(Z_t - \lambda Z_{t-1}) + u_t - \lambda u_{t-1} \quad (60)$$

A partir da equação (60) é imediata a conclusão de que, para as quatro hipóteses do item 2, o modelo é identificado desde que $\gamma \neq 0$. Obviamente, a equação (60) é superidentificada quando $u_t - \lambda u_{t-1} = \varepsilon_{2t}$ da hipótese 1. Este fato acarreta apenas um custo adicional na estimativa dos parâmetros de (60).

6 Abstract

It is often contended that it is impossible to obtain separate estimates of the partial adjustment and adaptive expectation coefficients when both processes are present in the model. This paper shows that this statement depends on the assumption regarding the disturbance term of the model. In addition, a test is provided to check whether or not the partial adjustment and adaptive expectation coefficients are identified. An example is presented using Cagan (1956) hyperinflation model of Germany. The results corroborate Cagan's assumption, but the autoregressive process is found to be explosive.

7 Bibliografia

Cagan, P. The monetary dynamics of hyper inflation. In: Friedman, Milton ed. *Studies in the quantity theory of money*. Chicago, University of Chicago Press, 1956

Feige, E.L. Expectations and adjustment in the monetary sector. *American Economic Review*, May, 1967.

Johnston J. *Econometric methods*. 2. ed. New York, McGraw-Hill, 1972.

Nerlove, M. Estimates of the elasticities of supply of selected agricultural commodities. *Journal of Farm Economics*, 38, 1958.

Zellner, A. *An introduction to bayesian inference in econometrics*. New York, John Wiley, 1971.

Zellner A. & Geisel M.S. Analysis of distributed lag models with applications to consumption function estimation. *Econometrica*, 38, Nov. 1970.

Theil, H. Principles of econometrics. New York, John Wiley, 1971.