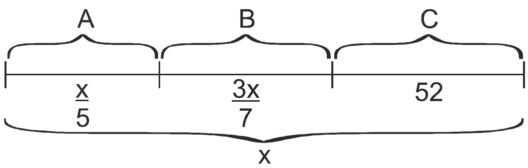
Matemática - Resolução

1 Três empreiteiras A, B e C foram contratadas para pavimentar uma estrada, cada uma encarregada de certo trecho.
A empreiteira A pavimentou 1/5 da extensão total, a empreiteira B pavimentou 3/7 do total e a empreiteira C pavimentou 52 km, completando todo o serviço. Então, a extensão total da estrada é :

A 130 km
B 120 km
C 125 km
D 135 km
E **140 km**



$$\frac{x}{5}+\frac{3x}{7}+52=x$$

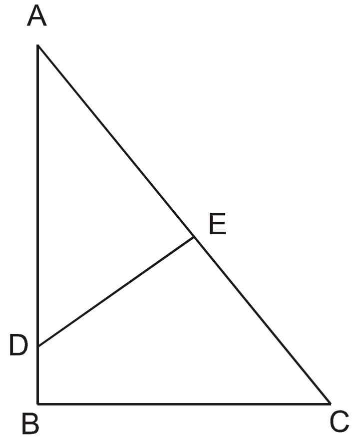
$$\frac{7x+15x}{35}+52=x$$

$$52=x-\frac{22x}{35}$$

$$52=\frac{35x-22x}{35}=\frac{13x}{35}$$

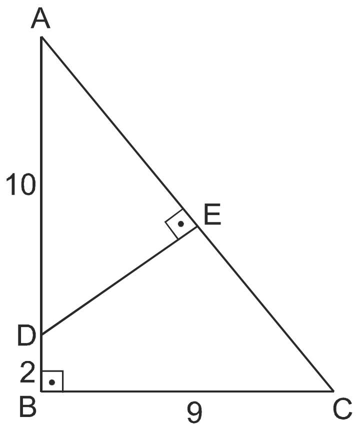
$$x=\frac{52x35}{13}=4x35=140km$$

2 Na figura abaixo, os ângulos ∠*ABC* e ∠*AED* são retos, e os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ medem, respectivamente, 9 cm, 10 cm e 2 cm.



A área do quadrilátero *BCED*, em cm^2, é:

A 38
B 36
C 34
D 32
E **30**



$$AC = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$$

$$\Delta AED \sim \Delta ABC$$

$$\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow \frac{DE}{9} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{área(\Delta AED)}{área(\Delta ABC)} = \left(\frac{10}{15}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$área(\Delta AED) = \frac{4}{9}\, área(\Delta ABC)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{9x12}{2} = 24$$

$$área(BCED) = \frac{9x12}{2} - 24 = 9x6 - 24 = 54 - 24 = 30$$

3 A equação $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}+.....=40$ apresenta como resultado um valor x, tal que :

A $21 \le x < 22$
B $\mathbf{20 \le x < 21}$
C $17 \le x < 18$
D $19 \le x < 20$
E $18 \le x < 19$

Sabe-se que o valor da soma infinita $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}+\cdots$ é igual a 40.

Podemos afirmar que:

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}+\cdots=\frac{x}{1-\frac{1}{2}}=2x$$

$$2x=40 \Leftrightarrow x=20$$

4 Considere o sistema linear $\begin{cases} 3x+ky=1 \\ kx+y=k \end{cases}$, de incógnitas $x\ e\ y$, onde k é um parâmetro real.
Então :

A se $k=3$, o sistema é impossível.
B se $k=\sqrt{3}$, o sistema é possível e determinado.
C se $k=-\sqrt{3}$, o sistema é possível e indeterminado.
D se $\boldsymbol{k=\pm\sqrt{3}}$, o sistema é impossível.
E se $k=-1$, o sistema é impossível.

$$\det\begin{bmatrix} 3 & k \\ k & 1 \end{bmatrix}=3-k^2=0 \Leftrightarrow k^2=3 \Leftrightarrow k=\pm\sqrt{3}$$

$k \ne \pm\sqrt{3}$ sistema possível e determinado

$k=\sqrt{3}$ $\begin{cases} 3x+\sqrt{3}y=1 \\ \sqrt{3}x+y=\sqrt{3} \end{cases}$ ~ $\begin{cases} 3x+\sqrt{3}y=1 \\ 3x+\sqrt{3}y=3 \end{cases}$ sistema impossível

$k=-\sqrt{3}$ $\begin{cases} 3x-\sqrt{3}y=1 \\ -\sqrt{3}x+y=-\sqrt{3} \end{cases}$ ~ $\begin{cases} 3x-\sqrt{3}y=1 \\ 3x-\sqrt{3}y=3 \end{cases}$ sistema impossível

5 O número de anagramas diferentes que podem ser construídos com as letras da palavra VARGAS, e que comecem e terminem com consoantes é:

A **144**
B 360
C 15
D 24
E 288

$$\underline{4}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{\frac{4!}{2!}}\ \underline{3}$$

$$\text{Total} = 4.\frac{4.3.2!}{2!}.3 = 12.12 = 144$$

6 Sabe-se que o produto de duas das raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - x^2 + kx + 4$ é igual a 1. O valor do coeficiente k é:

A – 12
B –4
C – 10
D – 2
E **–8**

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$-ax_1x_2x_3 = d \Leftrightarrow x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{4}{2} = -2$$
$$x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow x_3 = -2$$
$$0 = P(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 + k(-2) + 4$$
$$0 = -16 - 4 - 2k + 4 = -16 - 2k$$
$$2k = -16$$
$$k = -8$$

7 Uma indústria química pode estocar determinado líquido em recipientes cúbicos de aresta ***a*** ou em esferas de volume igual ao do recipiente cúbico. A expressão da área da superfície de um recipiente esférico de volume igual ao do cubo de aresta ***a*** será:

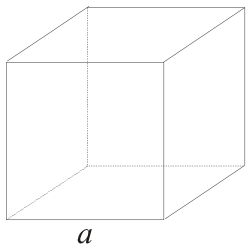
A $6\pi a^2$

B $\dfrac{4\pi a^2}{3}$

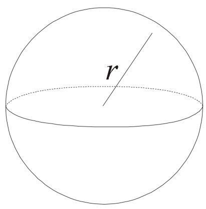
C $\sqrt[3]{\pi}\ a^2$

D $\boldsymbol{\sqrt[3]{36\pi}\,a^2}$

E $\dfrac{4\pi a^2}{5}$



volume=a^3



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = a^3$$

$$\Updownarrow$$

$$r^3 = \frac{3a^3}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}a$$

$$\text{área} = 4\pi r^2 = 4\pi\sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}}a^2$$

$$= \frac{4\pi.9^{1/3}}{16^{1/3}.\pi^{2/3}}a^2 = \frac{4}{4^{2/3}}.3^{2/3}.\pi^{1/3}.a^2$$

$$= 4^{1/3}.9^{1/3}.\pi^{1/3}a^2$$

$$= \sqrt[3]{36\pi}\,a^2$$

8 O sistema $\begin{cases} \log_{10} x + \log_{10} y = 1 \\ 3x - 5y = 5 \end{cases}$ tem como soluções os pares $(x_1; y_1)\ e\ (x_2; y_2)$. Então, a soma $y_1 + y_2$ será :

A -1
B -3
C 3
D 0
E 1

$$\begin{cases} \log_{10} x + \log_{10} y = 1 \\ 3x - 5y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{10} x.y = 1 \\ 3x - 5y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x.y = 10 \\ 3x - 5y = 5 \end{cases} \quad , se\ x.y > 0$$

$$3x - 5y = 5 \Leftrightarrow 3x = 5y + 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}(y+1)$$

$$10 = xy = \frac{5}{3}(y+1)y = \frac{5}{3}(y^2 + y)$$

$$\frac{5}{3}y^2 + \frac{5}{3}y - 10 = 0$$

$$5y^2 + 5y - 30 = 0$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1+5}{2} \Rightarrow y_1 = 2 \qquad y_2 = -3$$

$$y_1 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}(2+1) = 5$$

$$y_2 = -3 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{3}(-3+1) = -\frac{10}{3}$$

$$y_1 + y_2 = 2 + (-3) = -1$$

Obs: $(-3, -\frac{10}{3})$ **seria a solução do sistema** $\begin{cases} \log_{10} x.y = 1 \\ 3x - 5y = 5 \end{cases}$ **e não do sistema** $\begin{cases} \log_{10} x + \log_{10} y = 1 \\ 3x - 5y = 5 \end{cases}$ **, portanto a Banca Avaliadora houve por bem anular esta questão.**

9 Dadas as funções reais $f(x) = x$ e $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$, o conjunto-solução da inequação $f(x) \leq g(x)$ é:

A $\{x \in \Re \mid x \leq -1 \ ou \ x > 2\}$

B $\{x \in \Re \mid x > 1 \ ou \ x < 2\}$

C $\boldsymbol{\{x \in \Re \mid x \leq -1 \ ou \ 1 < x \leq 2\}}$

D $\{x \in \Re \mid x < 1 \ ou \ x \geq 2\}$

E $\{x \in \Re \mid 1 < x \leq 2\}$

$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{x-1}$$

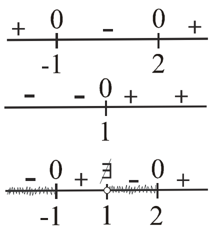
$$\Leftrightarrow x - \frac{2}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)-2}{x-1} \leq 0$$

$x^2 - x - 2$

$x - 1$

$\dfrac{x^2 - x - 2}{x-1}$



$$x2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

10 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{2x2}$ em que $a_{ij} = i^j$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 26 \end{pmatrix}$. Se a matriz B é tal que $A.B = C$, então:

A $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

B $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$

C $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

D $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

E $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

$$A.B = C \Leftrightarrow B = A^{-1}.C$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

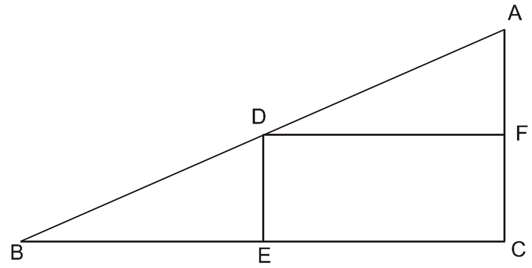
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 26 \end{bmatrix} =$$

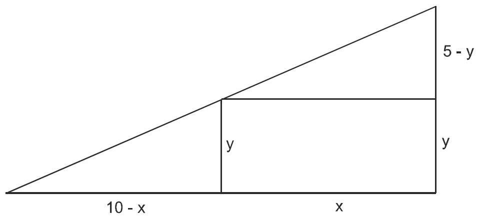
$$= \begin{bmatrix} -2+1 & 16-13 \\ 1-1 & -8+13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

11 A figura a seguir mostra um retângulo DFCE inscrito no triângulo retângulo ABC, cujos catetos têm medidas AC=5 e BC=10.



Então, a área máxima desse retângulo é:

A 13,5
B 15
C **12,5**
D 14,5
E 18



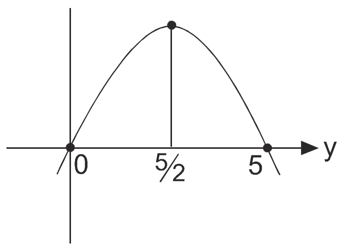
$$\frac{10-x}{y}=\frac{10}{5}$$

$$10-x=2y$$

$$x=10-2y$$

$$\acute{a}rea = x.y=(10-2y)y=10y-2y^2$$

$$10y-2y^2=0 \Leftrightarrow y=0 \quad \text{ou} \quad y=5$$



$$\acute{e}\ m\acute{a}xima\ quando\ \ y=\frac{5}{2}$$

$$neste\ caso,\ \acute{a}rea\ =10.\frac{5}{2}-2.\frac{25}{4}=25-\frac{25}{2}$$

$$\frac{25}{2}=12{,}5$$

12 A soma S_n dos n primeiros termos de uma seqüência $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots\ldots$ é obtida pela fórmula $S_n = \dfrac{n^2 - n}{1+n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$. Então, o valor do 5º termo (a_5) dessa seqüência é:

A $\dfrac{9}{10}$

B $\mathbf{\dfrac{14}{15}}$

C $\dfrac{7}{8}$

D $\dfrac{11}{12}$

E $\dfrac{13}{14}$

$$a_5 = S_5 - S_4 = \frac{25-5}{1+5} - \frac{16-4}{1+4} =$$
$$= \frac{20}{6} - \frac{12}{5} = \frac{100-72}{30} = \frac{28}{30}$$
$$= \frac{14}{15}$$

Fim da Prova de Matemática