Matemática

1 O monitor de um *notebook* tem formato retangular com a diagonal medindo d.
Um lado do retângulo mede $\frac{3}{4}$ do outro. A área do monitor é dada por:

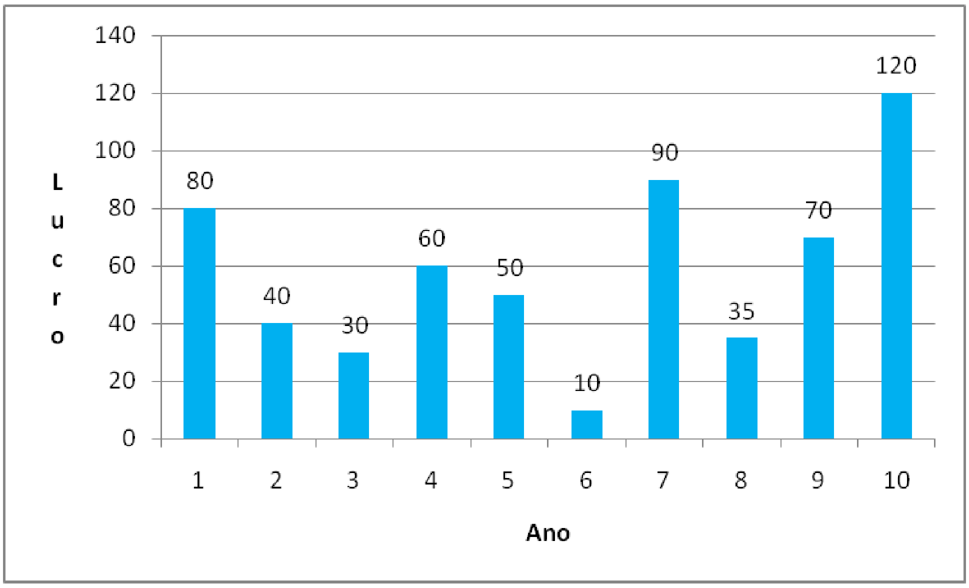
A $0{,}44d^2$
B $0{,}46d^2$
C $0{,}48d^2$
D $0{,}50d^2$
E $0{,}52d^2$

Resposta: C

Temos:

- Área: $x(0{,}75x) = 0{,}75x^2 = \frac{3}{4}x^2$.
- Pelo Teorema de Pitágoras: $d^2 = x^2 + (0{,}75x)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{16d^2}{25}$.
- Logo a área é $\frac{3}{4}(\frac{16d^2}{25}) = \frac{12d^2}{25} = 0{,}48d^2$.

2 O gráfico seguinte apresenta os lucros (em milhares de reais) de uma empresa ao longo de 10 anos (ano 1, ano 2, até ano 10).



O ano em que o lucro ficou mais próximo da média aritmética dos 10 lucros anuais foi:

A Ano 2
B Ano 3
C Ano 4
D Ano 5
E Ano 9

RESPOSTA: C

- Média dos 10 lucros: $\dfrac{80+40+30+60+50+10+90+35+70+120}{10} = 58{,}5$
- Ano cujo lucro está mais próximo de 58,5: ano 4

3 O transporte aéreo de pessoas entre duas cidades A e B é feito por uma única companhia em um único voo diário. O avião utilizado tem 180 lugares, e o preço da passagem p relaciona-se com o número x de passageiros por dia pela relação $p = 300 - 0{,}75x$.
A receita máxima possível por viagem é:

A R$ 30 000,00
B R$ 29 900,00
C R$ 29 800,00
D R$ 29 700,00
E R$ 29 600,00

Resposta: D

A receita é dada por $R = xp = x(300 - 0{,}75x)$, ou seja, $R = -0{,}75x^2 + 300x$.
O gráfico da receita é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, e a abscissa do vértice (ponto de máximo) é $x_v = \dfrac{-300}{2(-0{,}75)} = 200$. Assim, a função receita cresce até x = 200 e depois decresce.
Como o avião só tem 180 lugares, o máximo é atingido quando x = 180. Para que isso aconteça, é necessário que o preço p seja $p = 300 - 0{,}75(180) = 165$. Nessas condições, a receita é $R = 165(180) = 29700$.
Note que se p for menor que 165, o número de passageiros aumentará, mas só serão transportados 180 passageiros.

4 No final do ano 2000, o número de veículos licenciados em uma cidade era 400 e, no final de 2008, esse número passou para 560 veículos. Admitindo que o gráfico do número de veículos em função do tempo seja formado por pontos situados em uma mesma reta, podemos afirmar que, no final de 2010, o número de veículos será igual a:

A 580
B 590
C 600
D 610
E 620

Resposta: C

Chamando o ano 2000 de 0, a ano 2001 de 1 e assim por diante teremos:

Ano	Número de veículos
0	400
8	560

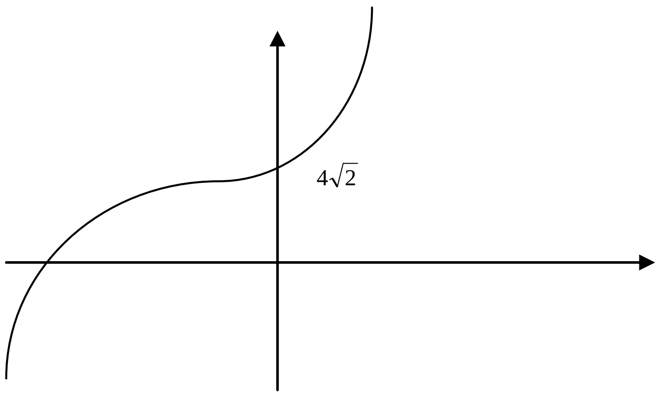
- Coeficiente angular da reta: $m = \dfrac{560-400}{8-0} = 20$.
- Ponto da reta (0,400).
- Equação da reta: $y - 400 = 20(x-0) \quad \Rightarrow \quad y = 400 + 20x$.
- Número de veículos em 2 010 (x = 10): $y = 400 + 20(10) = 600$.

5 A função polinomial $P(x) = x^3 + (1+\sqrt{2})x^2 + (4+\sqrt{2})x + 4\sqrt{2}$ é crescente em todo o conjunto dos números reais. Podemos afirmar que:

A O polinômio tem uma única raiz real negativa.
B A soma das raízes vale $1+\sqrt{2}$.
C O polinômio tem três raízes complexas não reais.
D O produto das raízes vale $4\sqrt{2}$.
E O polinômio tem três raízes reais distintas.

Resposta: A

Como o polinômio tem coeficientes reais, as raízes imaginárias aparecem aos pares. Logo existe ao menos uma raiz real.
Como o gráfico é crescente e $P(0) = 4\sqrt{2} > 0$, concluímos que sua forma tem o aspecto abaixo:



Portanto o polinômio tem uma única raiz negativa.

A alternativa b é incorreta pois a soma das raízes vale $-\frac{b}{a} = -\frac{(1+\sqrt{2})}{1} = -1-\sqrt{2}$.

A alternativa c é incorreta pois a equação tem 3 raízes (grau 3) e as raízes complexas não reais aparecem aos pares (complexos conjugados).

A alternativa d é incorreta pois o produto das raízes vale $-\frac{d}{a} = -\frac{4\sqrt{2}}{1} = -4\sqrt{2}$.

A alternativa e é incorreta pois ela pode ter duas raízes imaginárias e uma real.

6 No início do ano 2000, Alberto aplicou certa quantia a juros compostos, ganhando 20% ao ano. No início de 2009, seu montante era de R$ 5 160,00. Se ele deixar o dinheiro aplicado, nas mesmas condições, o juro recebido entre o início de 2010 e o início de 2011 será aproximadamente de:

A R$ 929,99
B R$ 1 032,00
C R$ 1 135,00
D R$ 1 238,00
E R$ 1 341,00

Resposta: D

- Montante no início de 2010: $M = 5160(1,2)^1 = 6192$.
- Juro entre o início de 2010 e o início de 2011: $J = (0,20)6192 = 1238,40$.

7 Roberto Mathias investiu R$12 000,00 em ações das empresas A e B. Na época da compra, os preços unitários das ações eram R$20,00 para a empresa A e R$25,00 para a B.
Depois de algum tempo, o preço unitário de A aumentou 200% e o de B aumentou apenas 10%. Nessa ocasião, o valor total das ações da carteira era de R$17 000,00.
A diferença, em valor absoluto, entre as quantidades de ações compradas de A e B foi de:

A 200
B 225
C 250
D 275
E 300

Resposta: E

Sejam x e y as quantidades compradas de A e B respectivamente. Após os aumentos, os preços serão:
A: $20+(200\%)20=60$.
B: $25+(10\%)25=27{,}5$.
Então:

$$\begin{cases} 20x+25y=12000 \\ 60x+27{,}5y=17000 \end{cases}$$

cuja solução é $x=100 \quad e \quad y=400$. Logo a diferença em valor absoluto foi de 300.

8 Quantos números inteiros pertencem ao domínio da função $f(x) = \log(9 - x^2) + \log(2 - x)$?

A 3
B 4
C 5
D 6
E infinitos

Resposta: B

Devemos ter simultaneamente:
$9 - x^2 > 0 \; (I)$ e $2 - x > 0 \; (II)$.

A solução de (I) é o intervalo: $\left]-3, 3\right[$.
A solução de (II) é o intervalo: $\left]-\infty, 2\right[$

A intersecção dos dois intervalos é $\left]-3, 2\right[$, ao qual pertencem os inteiros –2, -1, 0 e 1.

9 Sejam as matrizes $X = [x \quad y]$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$, $B = [100]$ e X^t a matriz transposta de X .

A representação gráfica do conjunto de pontos de coordenadas (x, y) que satisfazem a equação matricial $X.A.X^t = B$ é:

A uma hipérbole com excentricidade igual a 5/4.
B uma elipse com distância focal igual a $2\sqrt{21}$.
C uma hipérbole com excentricidade igual a 7/5.
D uma elipse com distância focal igual a $2\sqrt{10}$.
E uma parábola com eixo de simetria vertical.

Resposta: B

$XAX^t = [x \quad y]\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}[x \quad y]^t = [4x^2 \quad 25y^2]$. Assim, temos a equação:

$4x^2 + 25y^2 = 100 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, que representa uma elipse em que:
$a^2 = 25 \quad e \quad b^2 = 4$, ou seja, $a = 5 \;\; e \;\; b = 2$, em que a é o semieixo maior e b o semi-eixo menor da elipse. Sendo c a semidistância focal, sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$ e, portanto, $25 = 4 + c^2$. Logo $c = \sqrt{21}$, e a distância focal vale $2c = 2\sqrt{21}$.

10 Uma empresa de turismo opera com 3 funcionários. Para que haja atendimento em cada dia, é necessário que pelo menos um funcionário esteja presente. A probabilidade de cada funcionário faltar num dia é 5%, e o evento falta de cada um dos funcionários é independente da falta de cada um dos demais.
Em determinado dia, a probabilidade de haver atendimento é:

A 0,857375
B 0,90
C 0,925750
D 0,95
E 0,999875

Resposta: E

- A probabilidade de os 3 faltarem é $(0{,}05)(0{,}05)(0{,}05) = 0{,}000125$
- A probabilidade de haver atendimento (ao menos um comparecer) é $1 - 0{,}000125 = 0{,}999875$

11 A reta (t) passa pela intersecção das retas $2x - y = -2$ e $x + y = 11$ e é paralela à reta que passa pelos pontos A(1,1) e B(2,-2).
A intersecção da reta (t) com o eixo y é o ponto:

A (0,18)
B (0,17)
C (0,16)
D (0,15)
E (0,14)

Resposta: B

- Intersecção das retas $\begin{cases} 2x - y = -2 \\ x + y = 11 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 3 \; e \; y = 8$
- Coeficiente angular da reta AB: $m = \dfrac{-2-1}{2-1} = -3$
- Equação da reta t: $y - 8 = -3(x - 3)$
- A intersecção da reta t com o eixo y tem x = 0. Logo: $y - 8 = -3(0-3) \;\Rightarrow\; y = 17$.

12 Sabendo que o valor da secante de x é dado por $\sec x = \frac{5}{4}$, em que x pertence ao intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, podemos afirmar que os valores de $\cos x$, $sen\,x$ e $tg\ x$ são respectivamente:

A $\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\ e\ \frac{-3}{4}$

B $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\ e\ \frac{3}{4}$

C $\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\ e\ \frac{-4}{3}$

D $\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\ e\ \frac{4}{3}$

E $\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\ e\ \frac{3}{4}$

Resposta: A

- $\sec x = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$
- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}\, x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$. A raiz quadrada é negativa, pois x pertence ao 4º quadrante.
- Logo $\text{sen}\, x = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$

$$tgx = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{-3}{4}$$

13 No plano cartesiano, o ponto $C(2,3)$ é o centro de uma circunferência que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{CP}$, em que P é o ponto de coordenadas (5,7). A equação da circunferência é:

A $4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 27 = 0$
B $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$
C $4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 29 = 0$
D $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$
E $4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 31 = 0$

Resposta: A

O raio da circunferência é a metade da distância entre C e P. Portanto:

$$r = \frac{1}{2}(\sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \frac{5}{2}$$

Logo a equação da circunferência é:

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (\frac{5}{2})^2$, ou seja,

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 + 9 - \frac{25}{4} = 0$, ou ainda,

$4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 27 = 0$

14 Uma empresa projetou as receitas mensais para o ano 2010 do seguinte modo:

- A receita para janeiro é R$ 1 250 000,00.
- Em cada mês, a receita é R$ 40 000,00 superior à do mês anterior.

Nessas condições, a receita prevista para todo o ano de 2010 é:

A R$ 17 520 000,00
B R$ 17 560 000,00
C R$ 17 600 000,00
D R$ 17 640 000,00
E R$ 17 680 000,00

Resposta: D

As receitas mensais formam uma progressão aritmética (PA), sendo $a_1 = 1250000 \ e \ r = 40000$, em que a_1 é a receita de janeiro e r a razão da PA. Assim, a receita de dezembro é

$$a_{12} = 1250000 + 11.(40000) = 1690000.$$

A soma das receitas mensais é dada pela fórmula da soma da PA, isto é,

$$S = \frac{(1250000 + 1690000)}{2} 12 = 17640000.$$

15 Ao resolver o sistema linear determinado abaixo

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y-z=5 \\ 3x+2y-z=14 \end{cases}$$

encontramos como solução a tripla ordenada (a,b,c). O valor de a é:

A -1
B 0
C 1
D 2
E 3

Resposta: E

Vamos resolver o sistema por escalonamento:
1º passo: adicionamos à 2ª equação a 1ª multiplicada por –2, e adicionamos à 3ª equação a 1ª multiplicada por –3.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ -3y-3z=-3 \\ -y-4z=2 \end{cases}$$

2º passo: dividimos os termos da 2ª equação por -3

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ y+z=1 \\ -y-4z=2 \end{cases}$$

3º passo: adicionamos à 3ª equação a 2ª multiplicada por 1

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ y+z=1 \\ -3z=3 \end{cases}$$

4º passo: resolvendo de baixo para cima, encontramos:

$z=-1$

$y=2$

$x=3$

Portanto a solução é a tripla (3, 2, -1) e o valor de a é 3.

Fim da Prova de Matemática