FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

CURSO DE DIREITO

VESTIBULAR 2009

PROVA DE RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO

Fase 1

Novembro 2008

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

DIREITO GV
ESCOLA DE DIREITO DE SÃO PAULO

Sumário

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

DIREITO GV
ESCOLA DE DIREITO DE SÃO PAULO

1. Introdução

O programa da prova de Raciocínio Lógico-matemático elaborado para o processo seletivo do curso de Direito da FGV/SP tem como pressupostos básicos que:

- Na sociedade complexa e tecnológica em que vivemos, é cada vez mais evidente a necessidade do saber matemático, uma vez que é difícil encontrar setores em que a Matemática não esteja presente. Analisar dados, grandezas, gráficos, presentes no cotidiano das pessoas, nos jornais, telejornais, revistas ou Internet, e compreender e dimensionar espaços são elementos essenciais para ler e interpretar a realidade, tomar decisões políticas, sociais, econômicas e pessoais;

- A linguagem matemática tem caráter formal e difere de outras linguagens. Entretanto, saber Matemática não implica somente o domínio de códigos, símbolos e nomenclaturas desta linguagem. É necessário associar tais símbolos a um significado referencial, ou seja, saber aplicá-los em situações reais e resolver problemas de diferentes áreas;

- O candidato à Direito-GV deve ter uma sólida formação matemática, uma vez que o curso pretende formar bacharéis que, além de um profundo conhecimento do sistema jurídico brasileiro, transitem nas áreas de Economia e Administração.

A partir desses pressupostos, foram selecionados conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e Médio que permitam avaliar o raciocínio lógico-matemático do candidato e que favoreçam interações com outras áreas do conhecimento. Tais conteúdos visam a avaliar se o candidato é capaz de:

- reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem matemática;
- ler e interpretar dados apresentados em diferentes representações (tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas);

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
DIREITO GV
ESCOLA DE DIREITO DE SÃO PAULO

- raciocinar, conjecturar, estabelecer relações, analisar, argumentar criticamente, posicionar-se e expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática;
- resolver problemas que exigem o uso do raciocínio lógico e do conhecimento matemático.

Conteúdos

1. Álgebra: números e funções

1.1. Variação de grandezas: conjuntos numéricos (operações e propriedades); funções; representação e análise gráfica; equações e inequações.

1.2. Trigonometria.

1.3. Seqüências numéricas: progressões aritméticas e geométricas.

1.4. Sistemas lineares.

2. Geometria e Medidas

2.1. Geometria Plana: elementos; semelhança e congruência; representação de figuras.

2.2. Geometria Espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição (intersecção, paralelismo e perpendicularismo); inscrição e circunscrição de sólidos.

2.3. Geometria métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

2.4. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; interseção e posições relativas de figuras.

3. Análise de Dados

3.1. Estatística: descrição de dados; representações gráficas; análise de dados (média, moda e mediana, variância e desvio padrão).

3.2. Análise combinatória (princípio fundamental da contagem, permutações, arranjos e combinações).

3.3. Probabilidade: possibilidades; cálculo de probabilidades.
3.4. Matemática financeira (porcentagem, juros simples e compostos).

Os conteúdos visam avaliar se o candidato é capaz de:
- reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem matemática;
- ler e interpretar dados apresentados em diferentes representações (tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas);
- raciocinar, conjecturar, estabelecer relações, analisar, argumentar criticamente, posicionar-se e expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática;
- resolver problemas que exigem o uso do raciocínio lógico e do conhecimento matemático.

A análise dos resultados das provas de 2006, 2007 e 2008 nos levou a propor novamente, no Vestibular 2009, questões com grau de dificuldade diferenciada, contemplando itens e subitens também com diferentes graus de dificuldade, em uma mesma questão, que permitam melhor discriminar os candidatos.

2. A natureza da prova de 2009

A prova de Raciocínio Lógico-matemático procurou seguir os princípios específicos do vestibular Direito GV, na medida em que não priorizou a avaliação da capacidade de memorização de um grande número de fórmulas e resultados, mas a criatividade e a capacidade do candidato ler e interpretar dados, resolver problemas contextualizados, com finalidades práticas, que exigem raciocínio lógico, utilização adequada da linguagem matemática e argumentação sobre os resultados obtidos, o que é conveniente a um candidato a um curso de Direito.

2.1. As questões

As três questões da prova se identificam com os pressupostos estabelecidos, uma vez que exigiram do candidato a análise de dados reais, considerados essenciais para interpretar a realidade da sociedade complexa e tecnológica em que vivemos.

A Questão A apresentava três itens envolvendo Sistemas Lineares. Entretanto, era possível resolvê-la somente a partir da leitura e interpretação dos dados e da compreensão das regras apresentadas. Objetivava verificar a capacidade do candidato de ler e interpretar dados, utilizar raciocínio lógico e de posicionar-se e expressar-se criticamente, utilizando linguagem matemática.

A Questão B abordou uma função exponencial em um problema que envolvia decaimento. Focou representação e análise gráfica de uma deslocada de uma função exponencial, valor de uma função e o logaritmo como a inversa da função exponencial.

Visando, ainda, avaliar a capacidade do candidato em resolver problemas do cotidiano, foi proposta a Questão C, que exigiu conhecimentos sobre Geometria Plana (semelhança e congruência de triângulos) e/ou sobre Trigonometria do triângulo retângulo, Geometria Métrica (áreas, estimativa, valor exato e valor aproximado) e Matemática Financeira (porcentagem, juros simples e compostos), conteúdos que compõem o programa da prova.

A tabela a seguir apresenta a síntese dos conteúdos, competências e habilidades, envolvidos em cada uma das questões que compuseram a prova de Raciocínio Lógico-matemático do Vestibular 2009 para o curso de Direito GV.

Questões	Conteúdos abordados	Competências/Habilidades
Questão A	Sistemas lineares	- reconhecer e utilizar símbolos e nomenclatura da linguagem matemática; - ler e interpretar dados;

		- raciocinar, analisar, argumentar criticamente; - resolver problemas que exigem raciocínio lógico e conhecimento matemático; - posicionar-se e expressar-se com clareza, utilizando linguagem matemática.
Questão B	Variação de grandezas: conjuntos numéricos (propriedades); função exponencial de base 10; representação e análise gráfica; equação logarítmica	- reconhecer e utilizar símbolos e nomenclatura da linguagem matemática; - ler e interpretar dados; - raciocinar, analisar, argumentar criticamente; - resolver problemas que exigem raciocínio lógico e conhecimento matemático; - posicionar-se e expressar-se com clareza, utilizando linguagem matemática.
Questão C	Geometria plana: elementos do triângulo retângulo, semelhança e congruência Geometria métrica: áreas, valor exato e aproximado Matemática financeira: porcentagem, juros simples e composto	- ler e interpretar dados; - raciocinar, analisar, argumentar criticamente; - resolver problemas que exigem raciocínio lógico e conhecimento matemático - posicionar-se e expressar-se com clareza, utilizando linguagem matemática.

2.2. Os objetivos das questões

Na tabela seguinte são apresentados os objetivos das questões da Prova de Raciocínio Lógico-matemático.

Questão A	- Avaliar a capacidade de raciocínio lógico dedutivo, análise e argumentação crítica. - Avaliar a capacidade do candidato de resolver problemas que exigem raciocínio lógico e conhecimento matemático.
Questão B	- Avaliar a capacidade de leitura e interpretação de dados apresentados por meio de uma expressão matemática - Avaliar a capacidade de raciocínio, análise, argumentação crítica, posicionamento e expressão com clareza, utilizando a linguagem matemática. - Avaliar a capacidade do candidato de resolver problemas que exigem raciocínio lógico e conhecimento matemático (variação de grandezas, função exponencial, representação e análise gráfica e equação)
Questão C	- Avaliar a capacidade de leitura e interpretação de um problema no contexto do cotidiano. - Identificar se o candidato é capaz de utilizar, com clareza, a linguagem matemática. - Avaliar a capacidade de raciocínio lógico dedutivo, análise e argumentação crítica. - Avaliar a capacidade do candidato de resolver problemas que exigem conhecimento matemático.

Como podemos observar, alguns objetivos são comuns às três questões, o que é coerente com os princípios que orientam o processo seletivo ao Direito GV e com o tipo das questões elaboradas, uma vez que era preciso que o candidato analisasse os dados apresentados sob diferentes formas, raciocinasse logicamente e tivesse capacidade de argumentar criticamente sobre eles.

2.3. Justificativa quanto à escolha dos conteúdos

Considerando os princípios que orientam o processo seletivo ao Direito GV, as questões não se limitaram a exercícios de aplicação de conceitos e técnicas matemáticas pois nesse caso, estaríamos exigindo meramente a busca, na memória, de um exercício semelhante, o que não garante que o candidato seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações reais e complexas.

Isso posto, procuramos, nas três questões, explorar a aplicabilidade da Matemática em problemas do cotidiano, esperando que, a partir da leitura e interpretação de dados e de cálculos efetuados, o candidato analisasse e argumentasse criticamente, mostrando sua capacidade de raciocinar logicamente e resolver problemas.

Ressaltamos que, em cada uma das questões, os dados foram apresentados sob diferentes formas (texto, nomenclatura específica da linguagem matemática, expressão matemática e figura), de modo a avaliar se o candidato reconhece a natureza desses dados e consegue utilizar adequadamente as formas algébrica, numérica e gráfica.

A questão A envolveu Sistemas Lineares, subitem 1.4 do item 1 do programa da prova, conteúdo matemático auxiliar na resolução de muitos problemas do cotidiano.

Na questão B priorizamos o conteúdo de funções por ser este um tema também presente no cotidiano das pessoas, essencial na análise e compreensão da realidade, permitindo quantificar e tomar decisões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento, tais como Economia, Finanças, Contabilidade e Administração, nas quais transitará o bacharel em Direito GV. No caso, a situação envolvia uma “curva do esquecimento”, que pode ser utilizada para estimar a porcentagem de matéria que um estudante pode lembrar, um tempo após ter aprendido a mesma. Tal questão focou o subitem 1.1 do item 1 do programa da prova.

A Questão C abordou os itens 1, 2 e 3 do programa da prova, a saber, Trigonometria do triângulo retângulo, do item 1, Geometria Plana (semelhança e congruência de triângulos e representação de figuras) e Geometria Métrica (área), do item 2, assim como o subitem 4 do item 3, Análise de Dados, na medida em que envolveu porcentagem, juros simples e compostos.

3. As questões e as respostas esperadas

3.1. Questão A

Por gostarem de jogar bolinha de gude, José, André e Miguel definiram algumas regras e criaram o seguinte: uma partida é constituída por três rodadas sucessivas, em cada uma delas, o perdedor dá aos outros dois jogadores tal quantidade de bolas que estes passam a contar com o triplo do que tinham antes de cada rodada. José perdeu a primeira rodada; André, a segunda; Miguel perdeu a terceira e os três terminaram a partida com 27 bolinhas.

A.a) Quantas bolinhas cada um deles tinha no início da partida?

A.b) Há possibilidade de José e André terminarem a partida com 27 bolinhas e Miguel terminá-la sem nenhuma? Caso afirmativo, quantas bolinhas cada um tinha no início da partida?

A.c) O que ocorrerá ao término de uma partida se, no início, José tiver o triplo de bolinhas de André e Miguel tiver um terço da quantidade de bolinhas de André? Justifique sua resposta.

Solução:

A.a) Solução 1:

Considerando a regra do jogo e o fato dos três terem terminado a rodada com 27 bolinhas temos a situação seguinte:

	José	André	Miguel
Após a 3ª. jogada	27	27	27
Após a 2ª. jogada	9	9	18+18+27=63
Após a 1ª. jogada	3	6+42+9=57	21
Antes da 1ª. jogada	38+14+3=55	19	7

Assim, José tinha 55 bolinhas de gude, André tinha 19 bolinhas e Miguel tinha 7 bolinhas no início do jogo.

A.a) Solução 2:

Consideremos que no início do jogo José, André e Miguel tinham x, y e z bolinhas, respectivamente. De acordo com as regras, temos o quadro seguinte:

	José	André	Miguel
Antes da 1ª. rodada	x	y	z
Após a 1ª. rodada	x – 2y – 2z	3y	3z
Após a 2ª. rodada	3(x–2y–2z)	3y – 2(x–2y–2z) – 6z = -2x+7y-2z	9z
Após a 3ª. rodada	9(x–2y–2z)	3(-2x+7y–2z)	9z – 2(-2x+7y-2z)- - 6(x-2y-2z) = -2x-2y+25z

Como cada um dos jogadores terminou o jogo com 27 bolinhas obtemos

$$\begin{cases} 9(x-2y-2z)=27 \\ -6x+21y-6z=27 \\ -2x-2y+25z=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=3 \\ 2x-7y+2z=-9 \\ 2x+2y-25z=-27 \end{cases}$$

No sistema acima, indicaremos as linhas por L1, L2 e L3 e utilizaremos escalonamento

$$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ 2x-7y+2z=-9 \\ 2x+2y-25z=-27 \end{cases} \qquad \text{(L2 – L3)}$$

$$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ 2x-7y+2z=-9 \\ -9y+27z=18 \end{cases} \qquad \text{(2.L1 – L2)}$$

$$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ 3y-6z=15 \\ -9y+27z=18 \end{cases} \qquad (\tfrac{1}{3}\text{L2}) \qquad (\tfrac{1}{9}\text{L3})$$

$$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ y-2z=5 \\ -y+3z=2 \end{cases} \qquad (\text{L2 + L3})$$

$$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ y-2z=5 \\ z=7 \end{cases}$$

Assim, obtemos $z=7$ e

$$y-2z=5 \Rightarrow y=2z+5 \Rightarrow y=19$$

$$x-2y-2z=3 \Rightarrow x=2y+2z+3 \Rightarrow x=38+14+3 \Rightarrow x=55$$

Portanto, o número de bolinhas de gude de José, André e Miguel era 55, 19 e 7, respectivamente.

A.b) Solução 1

Considerando a possibilidade de José e André terem 27 bolinhas ao término do jogo e Miguel ficar sem nenhuma, temos a situação seguinte:

	José	André	Miguel
Após a 3ª. jogada	27	27	0
Após a 2ª. jogada	9	9	36
Após a 1ª. jogada	3	39	12
Antes da 1ª. jogada	37	13	4

Assim, há possibilidade desde que José tivesse 37 bolinhas, André tivesse 13 bolinhas e Miguel tivesse 4 bolinhas.

A.b) Solução 2

Para resolver a questão proposta utilizaremos o quadro apresentado na segunda solução do item (a). É possível José e André terem 27 bolinhas ao término do jogo e Miguel ficar sem nenhuma se existir uma solução do sistema

$$\begin{cases} 9(x-2y-2z)=27 \\ -6x+21y-6z=27 \\ -2x-2y+25z=0 \end{cases}$$

Indicando novamente as linhas desse sistema por L1, L2 e L3 e utilizando escalonamento obtemos:

$$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ 2x-7y+2z=-9 \\ 2x+2y-25z=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2L1 - L3 \\ L2 - L3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ 3y-6z=15 \\ -9y+27z=-9 \end{cases} \qquad 3.L2 + L3$$

$$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ y-2z=5 \\ 9z=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ y-2z=5 \\ z=4 \end{cases}$$

Como $z=4$ segue que

$$y-2z=5 \Rightarrow y=2z+5 \Rightarrow y=13$$
$$x-2y-2z=3 \Rightarrow x=2y+2z+3 \Rightarrow x=26+8+3 \Rightarrow x=37$$

Logo, é possível desde que José, André e Miguel tenham 37, 13 e 4 bolinhas, respectivamente, no início do jogo.
Observação: uma outra possibilidade é resolver os dois sistemas de equações lineares obtidos utilizando a regra de Cramer.

A.c) Solução

Nas condições apresentadas, no início do jogo André tinha y bolinhas de gude, José tinha $3y$ e Miguel tinha $\frac{y}{3}$ bolinhas. A situação é apresentada no quadro seguinte:

	José	André	Miguel
Antes da 1ª. rodada	$3y$	y	$\frac{y}{3}$
Após a 1ª. rodada	$3y-2y-\frac{2y}{3}=\frac{y}{3}$	$3y$	y
Após a 2ª. rodada	y	$3y-2y-\frac{2y}{3}=\frac{y}{3}$	$3y$
Após a 3ª. rodada	$3y$	y	$3y-2y-\frac{2y}{3}=\frac{y}{3}$

Assim, ao término do jogo eles têm o mesmo número de bolinhas que tinham no início.

3.2. Questão B

Hermann Ebbinghaus (1850 – 1909) foi o pioneiro nas pesquisas experimentais sobre memória, no século XIX. Foi o próprio sujeito em uma dessas pesquisas, na qual criou palavras que, embora sem sentido, foram, por meio da repetição, aprendidas com sucesso. Depois, testou sua memória em vários intervalos de tempo. Usou sílabas ininteligíveis em seus testes, para assegurar-se de que o ato puro da recordação não fosse maculado pelo significado.

A perda acelerada de informação pelo subconsciente é conhecida como “curva do esquecimento”, e pode ser utilizada para estimar a porcentagem de matéria de que, um tempo após tê-la aprendido, um estudante pode se lembrar; um modelo matemático para esse percentual de retenção é dado pela função:

$$y = y(x) = (100 - a)10^{-kx} + a$$

em que *x* é o tempo, dado em semanas, *k* e *a* são constantes positivas e $0 < a < 100$.

B.a) Dê a expressão de $y = y(x)$ no caso em que $a = 15$, $k = 0,2$ e $x \geq 0$. Esboce o gráfico da função obtida.

B.b) Explique, a partir da função obtida no subitem B.a, o que ocorre à medida que o tempo passa.

B.c) Utilizando-se das constantes do subitem B.a, calcule o percentual de retenção após decorrido o tempo de uma semana.

(Observação: caso necessite, *log* 0,63 ≅ -0,2).

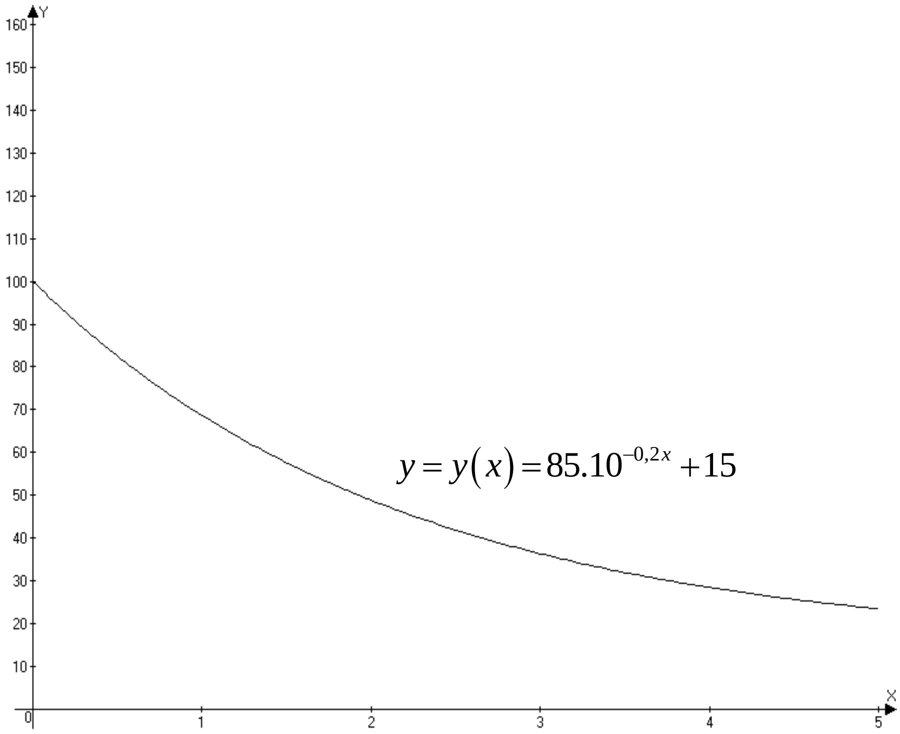
Solução:

B.a) Solução

Se $a = 15$ e $k = 0,2$ obtemos

$$y = y(x) = (100 - a)10^{-kx} + a = (100 - 15)10^{-0,2x} + 15$$
$$y = y\left(x\right) = 85.10^{-0,2x} + 15$$

O gráfico dessa função é dado por



Para esboçar esse gráfico basta observar que temos deslocadas da função exponencial $y = a^x$ no caso em que $a > 1$, não demandando cálculos de valores da função.

B.b) Solução

À medida que o tempo passa o valor de x aumenta e $10^{-0,2x} = \dfrac{1}{10^{0,2x}}$ vai se aproximando de zero. Com isso, $y = y(x)$ se aproxima de 15.

B.c) Solução

Após uma semana temos $y(1) = 85.10^{-0,2} + 15$

Mas, observemos que

$$\log 0,63 \cong -0,2 \Rightarrow 10^{\log 0,63} \cong 10^{-0,2} \Rightarrow 0,63 \cong 10^{-0,2}$$

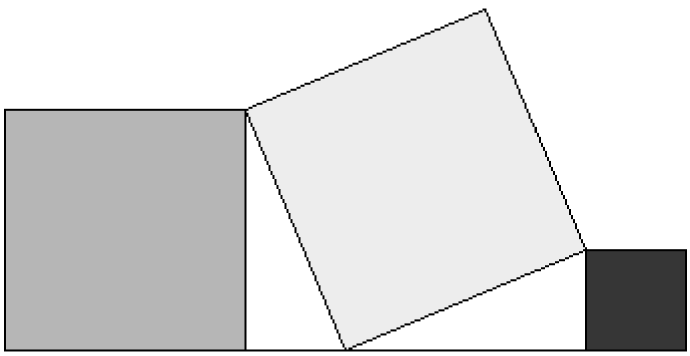
Portanto,

$$y(1) \cong 85(0,63)+15 = 53,55+15 = 68,55$$

Conseqüentemente, o percentual de retenção após uma semana é aproximadamente 68,5%.

3.3. Questão C

Um artista plástico deseja fazer o painel “Quadrados” conforme a figura a seguir.



C.a) Considerando que a medida do lado cinza escuro é 120 cm e que a do quadrado preto é 50 cm, qual é a medida do lado do quadrado cinza claro?

C.b) Para confeccionar o painel, ele utilizará um material vendido somente em placas inteiras de 1,8 m x 1,8 m. Quantas placas serão necessárias para produzir o painel?

C.c) Um outro profissional, que trabalha com peças miúdas, costuma comprar material que sobra da produção dos artistas por R$ 250,00 o metro quadrado. Caso sobre material do painel confeccionado e o artista queira vendê-lo, quanto este receberá?

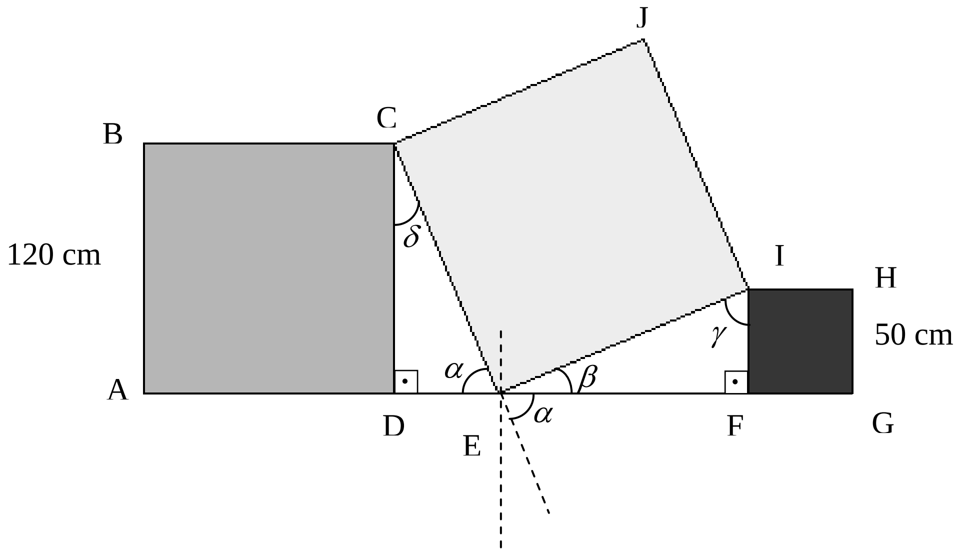
C.d) O comprador de sobra de material quer pagar 20% no ato da compra e o restante em 30 e 60 dias com juros compostos de 1% ao mês, pagando 50% do valor devido ao término do primeiro mês. Quanto pagará no total?

Solução:

C.a) Solução 1

No painel, consideremos os ângulos $\alpha = D\hat{E}C$, $\beta = I\hat{E}F$, $\gamma = F\hat{I}E$ e $\delta = D\hat{C}E$. Temos que $\alpha + \beta = 90^o$. Além disso, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o temos no triângulo EFI que $\beta + \gamma + 90^o = 180^o$ e portanto $\beta + \gamma = 90^o$. Conseqüentemente, $\alpha = \gamma$.

Analogamente, no triângulo CDE temos $\alpha + \delta + 90^o = 180^o$ e portanto $\alpha + \delta = 90^o$, assegurando que $\beta = \delta$.



Temos, assim, que os triângulos retângulos CDE e EFI têm os três ângulos iguais e um lado de igual comprimento ao lado correspondente no outro triângulo. Logo, esses triângulos são congruentes.

Em particular, $DE = FI = 50cm$.

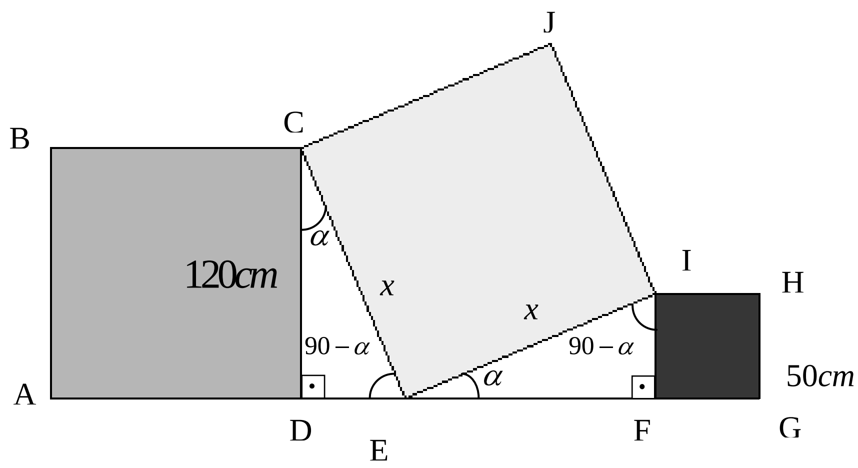
A fim de determinar a medida do lado do quadrado cinza claro ($CE = EI$) basta observar que esse lado é a hipotenusa dos triângulos retângulos CDE e EFI, cujos catetos medem $120cm$ e $50cm$.

Assim, segue pelo Teorema de Pitágoras que

$$\overline{CE}^2 = 120^2 + 50^2 = 14.400 + 2.500$$
$$\overline{CE}^2 = 16.900$$
$$\overline{CE} = 130cm$$

Portanto, a medida do lado do quadrado cinza claro é $130cm$.

C.a) Solução 2



Seja x o lado do quadrado cinza claro CEIJ.

No triângulo CDE, considere o ângulo DCE=α e a hipotenusa CE = x. Como o triângulo CDE é retângulo, temos que o ângulo CED é igual a $90-\alpha$. Assim, como o lado CD mede 120 cm, $\cos\alpha = \frac{120}{x}$. Da mesma forma, no triângulo retângulo EFI, considere o ângulo IEF=α. Como o cateto IF = 50 cm, temos que $sen\alpha = \frac{50}{x}$. Pela relação fundamental temos:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{120^2}{x^2} + \frac{50^2}{x^2} = 1$$

$$120^2 + 50^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{120^2 + 50^2}$$

$$x = \sqrt{14.400 + 2.500} = \sqrt{16.900}$$

$$x = 130$$

Portanto, a medida do lado do quadrado cinza claro é $130cm$.

C.b) Solução

Como a medida dos lados dos quadrados é $120cm$, $130cm$ e $50cm$, a quantidade q de material necessário é obtida calculando a soma das áreas dos quadrados que compõem o painel. Ou seja,

$$q = 120^2 + 130^2 + 50^2 = 14.400 + 16.900 + 2.500$$

$$q = 33.800cm^2 = 3,38m^2$$

Considerando que cada placa mede $1,80m$ x $1,80m$, sua área é $1,80.1,80 = 3,24m^2$. Como $3,38 > 3,24$ e só são comercializadas placas inteiras, será necessário comprar 2 placas para confeccionar o painel.

C.c) Solução

As duas placas adquiridas fornecem $2.(3,24) = 6,48m^2$ de material. Como serão utilizados $3,38m^2$, a sobra de material será $6,48m^2 - 3,38m^2 = 3,1m^2$.

Se o outro artista comprar o material que sobra por $R\$250,00$ o metro quadrado e o artista que confeccionou o painel quiser vender o material restante receberá $250.(3,1) = 775$ reais.

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

DIREITO GV
ESCOLA DE DIREITO DE SÃO PAULO

C.d) Solução

Se o comprador pagar 20% no ato da compra, a entrada será de

$$20\%(775) = \frac{20}{100}.775 = \frac{1}{5}.775 = 155 \quad \text{reais}$$

O restante a pagar será $R\$620,00$, em 30 e 60 dias, com juros de 1% ao mês. Mas, $R\$620,00 + 1\%(R\$620,00) = R\$620,00 + R\$6,20 = R\$626,20$.

Considerando que após trinta dias será pago 50% de $R\$626,20$, a saber, $R\$313,10$, sobre o saldo devedor incidirá novamente 1%. O pagamento final, ao término de 60 dias será

$$R\$313,10 + 1\%(R\$313,10) = R\$313,10 + R\$3,13 = R\$316,23.$$

Conseqüentemente, no total, o comprador pagará

$$R\$155,00 + R\$313,10 + R\$316,23 = R\$784,33.$$

4. A grade definitiva de pontuação

Questão	Categoria de acerto	Padrão utilizado para correção
A.a	0	Em branco ou questão totalmente errada.
	25	Número correto de bolinhas após a 2ª. rodada para o candidato que resolveu a questão do final para o início da partida, sem utilizar sistemas lineares Ou Obtenção do sistema linear com uma equação correta Ou Identificação do número de bolinhas de cada jogador utilizando variáveis após a 1ª. rodada.
	50	Número correto de bolinhas após a 1ª. rodada para o candidato que resolveu a questão do final para o início da partida, sem utilizar sistemas lineares, demonstrando compreensão da regra subjacente ao jogo

		Ou Obtenção do sistema linear com as três equações corretas.
		Ou Número correto de bolinhas de um dos jogadores. Ou Obtenção do número de bolinhas nas 3 rodadas utilizando variáveis, mas sem igualar a 27.
	75	Número correto de bolinhas antes da 1ª. rodada para o candidato que resolveu a questão do final para o início da partida, sem utilizar sistemas lineares Ou Cálculo correto do número de bolinhas de dois dos jogadores Ou Resolução do sistema com algum erro nos cálculos.
	100	Cálculo correto do número de bolinhas dos três jogadores.
A.b	0	Em branco ou questão totalmente errada.
	25	Número correto de bolinhas após a 2ª. rodada para o candidato que resolveu a questão do final para o início da partida, sem utilizar sistemas lineares Ou Identificação do número de bolinhas de cada jogador utilizando variáveis após a 1ª. rodada. Ou Argumentação de que a situação só seria possível se fosse alterada a quantidade de bolinhas do início do jogo, a saber, 81 bolinhas.
	50	Número correto de bolinhas após a 1ª. rodada para o candidato que resolveu a questão do final para o início da partida, sem utilizar sistemas lineares, demonstrando compreensão da regra subjacente ao jogo Ou Obtenção do sistema linear Ou Número correto de bolinhas de um dos jogadores. Ou Erros nos cálculos com interpretação da regra da 2ª. para a 1ª. rodada.
	75	Número correto de bolinhas antes da 1ª. rodada para o candidato que resolveu a questão do final para o início da partida, sem utilizar sistemas lineares Ou Cálculo correto do número de bolinhas de dois dos jogadores Ou Resolução do final para o início correta até a 1ª. rodada, com erro dessa jogada para a inicial Ou Resolução do sistema com algum erro nos cálculos
	100	Cálculo correto do número de bolinhas dos três jogadores.

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

DIREITO GV

ESCOLA DE DIREITO DE SÃO PAULO

A.c	0	Em branco ou questão totalmente errada.
	25	Perceber que no início do jogo André tinha y bolinhas de gude, José tinha $3y$ e Miguel tinha $\frac{y}{3}$ bolinhas. Ou Só a resposta, sem justificativa.
	50	Identificação do número de bolinhas que André e Miguel tinham após a 1ª. rodada. Ou Resolução sem utilizar variável.
	75	Identificação do número de bolinhas que cada um tinha após a 1ª. ou 2ª. rodada. Ou Obtenção da resposta correta sem justificativa, sem explicitar a lógica a regra, a lógica subjacente ao jogo
	100	Conclusão de que ao término do jogo eles têm o mesmo número de bolinhas que tinham no início.
B.a	0	Em branco ou questão totalmente errada.
	25	Obtenção da expressão correta para a função y = y(x).
	50	Identificação do gráfico da função como deslocada de função do tipo $y = a^x$, com a>1. Ou Esboço errado mas identificação que y(0) = 100, aparecendo uma reta decrescente.
	75	Esboço do gráfico da função como deslocada da função $y = 10^x$ considerando $x \geq 0$.
	100	Esboço do gráfico da função como deslocada da função $y = 10^x$, percebendo que o gráfico está acima da reta y = 15, paralela ao eixo das abcissas, considerando $x \geq 0$.
B.b	0	Em branco ou questão totalmente errada.
	25	Perceber que à medida que o tempo passa o valor de x aumenta e o valor de y diminui. Ou Explicação que a medida que o tempo passa o percentual de retenção diminui.
	50	Perceber que $10^{-0,2x} = \frac{1}{10^{0,2x}}$ vai se aproximando de zero quando x aumenta. Ou Referenciar um gráfico decrescente e porcentagem.
	75	Concluir que $y = y(x)$ se aproxima de 15%.

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

DIREITO GV
ESCOLA DE DIREITO DE SÃO PAULO

	100	Concluir que $y = y(x)$ se aproxima de 15 e "estaciona".
B.c	0	Em branco ou questão totalmente errada.
	25	Expressar $y(1) = 85.10^{-0,2} + 15$ corretamente Ou Só a resposta, com cálculos no verso, sem detalhamento.
	50	Perceber que $0,63 \cong 10^{-0,2}$ a partir de $\log 0,63 \cong -0,2$. Ou Perceber que $10^{-0,2} = 10^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{10}}$ e aproximar $\sqrt[5]{10}$ por 1,3. Ou Calcular corretamente até 68,55% e, a seguir, calcular o complementar 100% – 68,55%.
	75	Calcular quase corretamente y(1) = 68,55, com pequeno erro. Ou Calcular y(1) = 68,55 sem explicitar que $0,63 \cong 10^{-0,2}$ a partir de $\log 0,63 \cong -0,2$.
	100	Concluir que o percentual de retenção após uma semana é aproximadamente 68,5%.
C.a	0	Em branco ou questão totalmente errada.
	25	Identificação dos triângulos retângulos CDE e EFI e de dois ângulos com mesma medida nesses triângulos. Ou cálculo da medida do lado usando o teorema de Pitágoras diretamente, sem justificar como encontrou os valores dos lados do triângulo retângulo (sem fazer qualquer referência a congruência)
	50	Cálculo da medida do lado usando o teorema de Pitágoras diretamente, dando indícios de como encontrou os valores dos lados do triângulo retângulo
	75	Perceber que a medida do lado do quadrado cinza claro é a medida da hipotenusa dos triângulos retângulos CDE e EFI. (indicar que percebeu a semelhança por meio de desenho ou da relação entre ângulos e lados, na figura) e realizar corretamente os cálculos
	100	Cálculo correto do valor da hipotenusa, utilizando o Teorema de Pitágoras, indicando a semelhança entre os triângulos. Ou ainda, cálculo correto utilizando trigonometria.
C.b	0	Em branco ou questão totalmente errada.
	25	Reconhecer que a quantidade q de material é obtida calculando a soma das áreas dos quadrados que compõem o painel. Somente indicar os cálculos, sem resolvê-los. Ou

		Indicar que são necessárias duas placas para construir o painel sem realizar os cálculos ou indicar cálculos errados.
	50	Indicar o número de placas necessárias para compor o painel indicando a área utilizada por meio de desenho.
	75	Cálculo da área utilizada pelo painel sem fazer relação com a quantidade de placa que deve ser comprada para construir o painel.
	100	Cálculo da área total do painel e perceber que a quantidade de material necessária para compor o painel é maior do que a quantidade correspondente a uma placa e concluir que será necessário comprar 2 placas.
C.c	0	Em branco ou questão totalmente errada.
	25	Justificativa sobre a diferença de preço sem menção ao rendimento. Ou, indicar a operação utilizada para o cálculo da sobra de material com erro nos cálculos.
	50	Cálculo correto da sobra de material Ou Encontrar o valor que o artista receberá, mas com erros de cálculo no decorrer da resolução.
	75	Cálculo do montante correspondente a venda do material que sobra com erro nas casas decimais. Ou erro na transformação de centímetros para metros.
	100	Cálculo correto do montante correspondente a venda do material que sobra.
C.d	0	Em branco ou questão totalmente errada.
	25	Cálculo correto dos 20% pagos no ato da compra.
	50	Cálculo correto dos 20% pagos no ato da compra e cálculo correto da parcela a ser paga após 30 dias, com erro no cálculo da parcela a ser paga em 60 dias. Ou, realizar cálculos corretos, partindo do valor errado (calculado no item anterior)
	75	Cálculo correto das parcelas a serem pagas após 30 e 60 dias. Ou, resolver o problema corretamente com erro nas casas decimais.
	100	Cálculo correto do montante a ser pago pelo comprador da sobre de material.

5. Alguns modelos de resposta

5.1. Questão A.a

Desempenho – 0%

a) $x \cdot 3 = 27$

$x = 9$

R: Cada um tinha 9 bolinhas no início

Desempenho – 25%

A a)

	José	Miguel	André
início	x	y	z
1ª rodada	$x - 2y - 2z$	$3y$	$3z$
2ª rodada	$x - 2y - 2z + 2x$	$3y + 2y$	$3z - 2x - 2y$
3ª rodada	$3x - 2y - 2z$	$3y - 2x - 2z$	$3z - 2x$
Fim	27	27	27

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 27 \\ 3y - 2x - 2z = 27 \\ 3z - 2x = 27 \end{cases}$$

Desempenho – 50%

	José	André	Miguel	
	x	y	z	$= 81$
$x - 7y - 16z$	$x - 2y - 2z$	$3y$	$3z$	$= 81$
	$3x - 6y - 6z$	$3y - 2x - 4y - 4z - 6z$ $-2x - y - 10z$	$9z$	$= 81$
$-7x - 35y - 71z$	$9x - 18y - 18z$	$-6x - 3y - 30z$	$9z - 6x - 12y - 12z - 4x - 2y - 20z$ $-10x - 14y - 23z$	

$$\begin{cases} x + y + z = 81 \quad .(-1) \\ x - 7y - z = 81 \\ -7x - 35y - 71z = 81 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 81 \\ 0x - 8y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ou

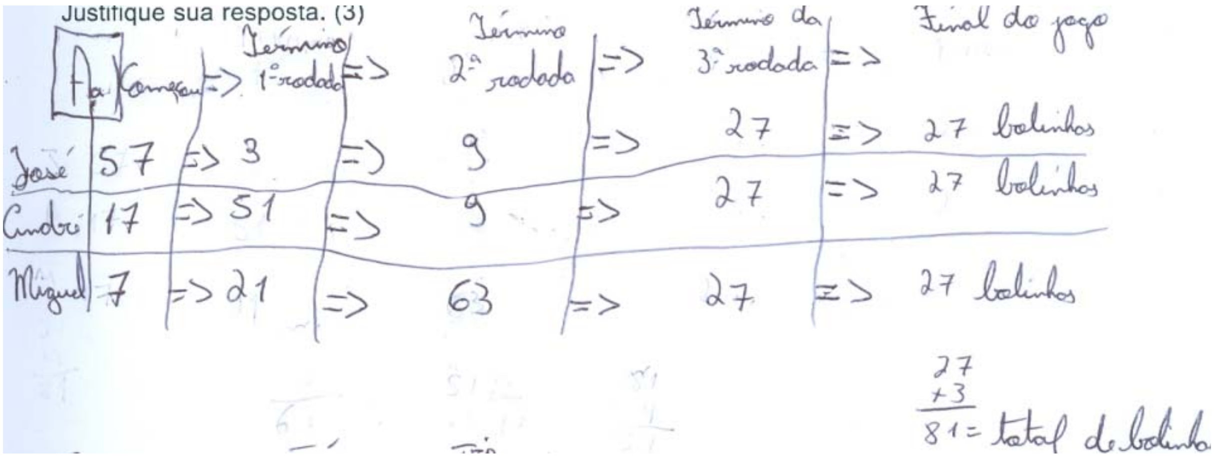
a) Considerando a quantidade de José como x, André como y e Miguel como z, no início temos:

$$\begin{cases} 9x - 18y - 18z = 27 \\ -6x + 21y - 6z = 27 \\ -2x - 2y + 25z = 27 \end{cases}$$

Pela regra de Cramer ou Escalonamento, obtemos: $x = 21$; $y = 3$; $z = 3$.

Concluímos que José iniciou com 21 bolas, enquanto André e Miguel iniciaram com 3 bolas no jogo, cada um.

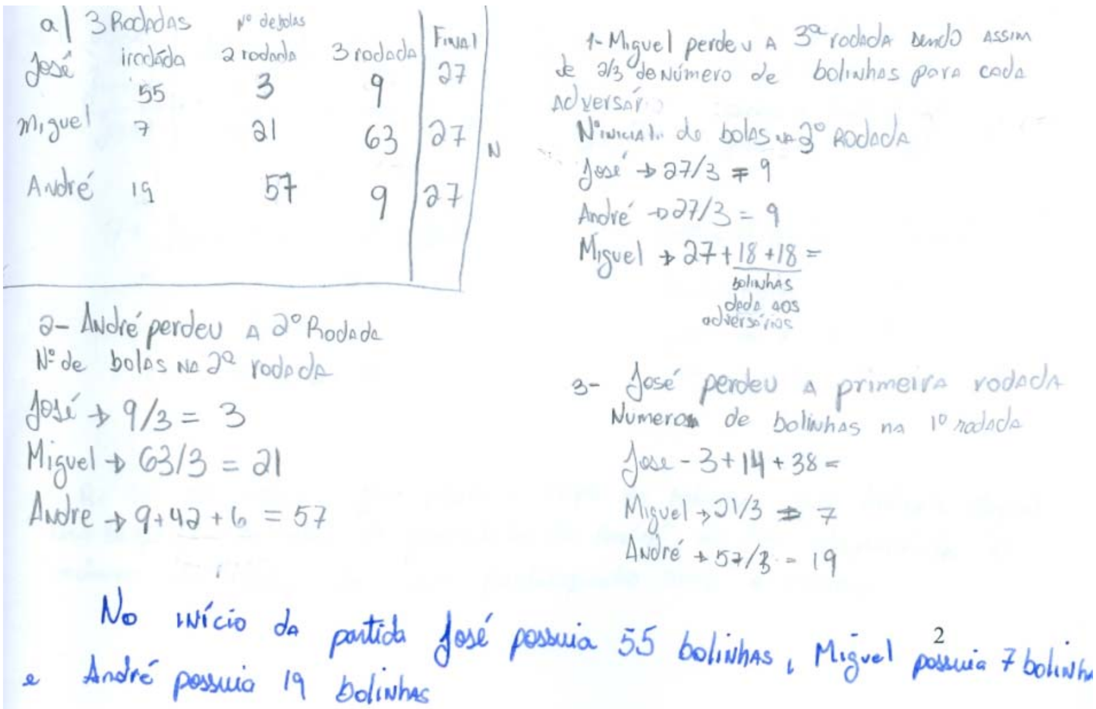
Desempenho - 75%


Justifique sua resposta. (3)

A	a Começou =>	Término 1ª rodada =>	Término 2ª rodada =>	Término da 3ª rodada =>	Final do jogo
José	57	=> 3	=> 9	=> 27	=> 27 bolinhas
André	17	=> 51	=> 9	=> 27	=> 27 bolinhas
Miguel	7	=> 21	=> 63	=> 27	=> 27 bolinhas

27
+3
81 = total de bolinhas

Desempenho - 100%


a) 3 Rodadas	nº de bolas 1 rodada	2 rodada	3 rodada	Final
José	55	3	9	27
Miguel	7	21	63	27
André	19	57	9	27

1- Miguel perdeu a 3ª rodada sendo assim de 2/3 de número de bolinhas para cada adversário
Nº inicial de bolas na 3ª rodada
José → 27/3 = 9
André → 27/3 = 9
Miguel → 27 + 18 + 18 =
bolinhas dada aos adversários

2- André perdeu a 2ª Rodada
Nº de bolas na 2ª rodada
José → 9/3 = 3
Miguel → 63/3 = 21
André → 9+42+6 = 57

3- José perdeu a primeira rodada
Numero de bolinhas na 1º rodada
Jose - 3 + 14 + 38 =
Miguel → 21/3 = 7
André → 57/3 = 19

No início da partida José possuía 55 bolinhas, Miguel possuía 7 bolinhas e André possuía 19 bolinhas

Ou

A. a)

	José	André	Miguel
Início	x	y	z
Depois J	a	$3y$	$3z$
Depois A	$3a$	b	$9z$
Depois M	$9a$	$3b$	c

$9a = 27$ $\quad 3b = 27$ $\quad c = 27$

$a = 3$ $\quad b = 9$

José = 55 André = 19 Miguel = 7

$a = x - 2y - 2z = 3$

$b = 3y - 2a - 6z = 9$

$c = 9z - 6a - 2b = 27$

$\therefore c = 9z - 6.3 - 2.9 = 27$

$z = 7$

$b = 3y - 2.3 - 6.7 = 9$

$y = 19$

$a = x - 2.19 - 2.7 = 3$

$x = 55$

Ou

Aa.

	José	André	Miguel
início	$3+2.19+14=55$	19	7
1ª rodada	3	$9+6+42=57$	21
2ª rodada	9	9	$27+2.18=63$
final	27	27	27

As quantidades iniciais eram: José, 55 bolinhas; André, 19 bolinhas e Miguel 7 ~~bolinhas~~ bolinhas.

Ou

$$x - 2y - 2z = 3$$
$$3y - 2 - 2y - 2\left(\frac{y+2}{3}\right) = 3$$
$$3y - 2 - 2y - \frac{2y-4}{3} = 3$$
$$9y - 6 - 6y - 2y - 4 = 9$$
$$y - 10 = 9$$
$$\boxed{y = 19}$$

$$x = 3y - 2$$
$$x = 3.19 - 2$$
$$\boxed{x = 55}$$

$$z = \frac{y+2}{3} = \frac{21}{3} = \boxed{7}$$

José possuia 55 bolinhas no iní da partida, enquanto andré possuia 19 e miguel 7.

5.2. Questão A.b

Desempenho – 0%

b) Sim. Se cada cada um tiver 6 bolinhas.

Desempenho - 25%

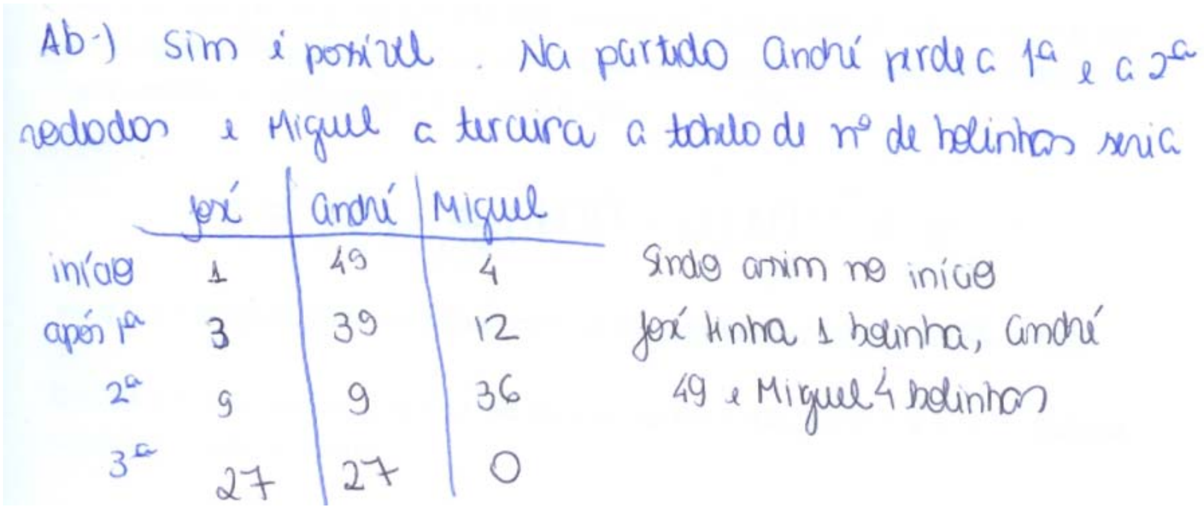
Caso a quantidade de bolinhas em jogo fosse alterada, sim; do contrário, não.

Desempenho – 50%

b)	Início	TÉR 1ª rodada	TÉR 2ª rodada	Final
José	13	39	9	27
André	37	3	9	27
Miguel	4	12	36	0

R: Sim

Desempenho - 75%



Ab) Sim é possível. Na partida André perde a 1ª e a 2ª rodadas e Miguel a terceira a tabela de nº de bolinhas seria

	José	André	Miguel
início	1	49	4
após 1ª	3	39	12
2ª	9	9	36
3ª	27	27	0

Sendo assim no início José tinha 1 bolinha, André 49 e Miguel 4 bolinhas

Desempenho - 100%

A. b)

	José	André	Miguel
	x	y	z
I			
DJ	a	3y	3z
DA	3a	b	9z
DM	9a	3b	c
F	27	27	0

$a = 3$ $b = 9$ $c = 0$

José = 37 André = 13 Miguel = 4

$c = 9z - 6 . 3 - 2 . 9 = 0$

$9z = 36$

$z = 4$

$b = 3y - 2 . 3 - 6 . 4 = 9$

$3y = 39$

$y = 13$

$a = x - 2 . 13 - 2 . 4 = 3$

$x = 37$

Ou

b)

	1º rodada	2ª rodada	3ª rodada	Final
Miguel	4	12	36	0
André	13	39	9	27
José	37	3	9	27

1- 3ª rodada - Migue perde e paga
Nº inicial da 3ª rodada
André → 27/3 = 9 bolinhas
José → 27/3 = 9 bolinhas
Miguel → 18+18 = 36 bolinhas

2- André perde a 2 rod
André 24+6+9 = 39
José → 9 /3 = 3
Miguel → 36/3 = 12

3- José perde a 1º rodada
André - 39/3 = 13
José - 3+26+8 = 37
Miguel → 12/3 = 4

R: Sim, há possibilidade de André e José terminarem a partida com 27 bolinhas e Miguel nenhuma, para isso é necessário que no início, Miguel possua 4 bolinhas, André possua 13 bolinhas e Jose 37 bolinhas.

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

DIREITO GV

ESCOLA DE DIREITO DE SÃO PAULO

5.3. Questão A.c

Desempenho - 0%

A.c) José: 3X Qnt de André = 3

Miguel: $\frac{1}{3}$ Qnt de André.

Admitindo-se hipoteticamente, em uma mesma proporção, que André possua 3 bolinhas:

José: 9 bolinhas

Miguel: 1 bolinha

José, terá ganho as três partidas

Desempenho - 25%

c) andré: x

josé: $3x$

miguel: $\frac{1}{3}x$

$$x + \frac{3}{x} + \frac{1}{3}x = \frac{3x+9x+1x}{3} = \frac{13x}{3}$$

R: no final da partida haverá um menino com uma bolinha de gude a mais que os outros dois

Ou

c) Considerando as regras do jogo, ambos os três terminarão com as quantidades iniciais de bolas com as quais iniciaram o jogo.

Desempenho – 50%

A. c) José : 3. André
Miguel: $\frac{1}{3}$. André } 3 rodadas

J: 9 → 1 → 3 → 9
A: 3 → 9 → 1 → 3
M: 1 → 3 → 9 → 1

R: No término da partida José, André e Miguel estarão com o mesmo número de bolinhas de gude que cada um tinha no início, pois são três rodadas sucessivas, um com o triplo de bolinhas que o outr ou seja a cada três rodadas voltam a ter o número de bolinhas inicic

Desempenho - 75%

A.c) J	A	M
3A	A	$\frac{1}{3}$A
$\frac{1}{3}$A	3A	A
A	$\frac{1}{3}$A	3A
3A	A	$\frac{1}{3}$A

R→ O QUE OCORRERÁ É QUE ELES TERMINARÃO A PARTIDA COM A MESMA QUANTIDADE DE BOLINHAS QUE COMEÇARAM

Desempenho - 100%

c) Todos terão a mesma quantidade que tinham no início. Observe:

	José	André	Miguel
início:	$3x$	x	$\frac{x}{3}$
1ª rodada:	$3x-2x-\frac{2x}{3}$	$3x$	x
	$\frac{x}{3}$	$3x$	x
2ª rodada:	x	$3x-2x-\frac{2x}{3}=\frac{x}{3}$	$3x$
3ª rodada:	$3x$	x	$3x-2x-\frac{2x}{3}=\frac{x}{3}$

Ou

c)

	1º rodada	2 rodada	3º rodada	fim
Miguel	$\frac{1}{3}x$	x	$3x$	$\frac{1}{3}x$
André	x	$3x$	$\frac{1}{3}x$	x
José	$3x$	$\frac{1}{3}x$	x	$3x$

1 – José perde a 1º rodada
Miguel → $\frac{1}{3}x \cdot 3 \to x$
André → $x \cdot 3 \to 3x$
José $3x - 2x + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x$

2 → André perde a 2º rodada
Miguel → $x \cdot 3 = 3x$
José → $\frac{1}{3}x \cdot 3 = x$
André → $3x - 2x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x$

3 - Miguel perde a 3º rodada
André → $\frac{1}{3}x \cdot 3 = x$
José → $x \cdot 3 = 3x$
Miguel → $3x - 2x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x$

R: Se no início José possuir o triplo de bolinhas que André e Miguel um terço de bolinhas da quantidade de André, no fim da partida o número de bolinhas de cada participante será o mesmo.

Ou

Ac.	José	André	Miguel
início	$3x$	x	$\frac{x}{3}$
1ª rodada	$3x - 2x - \frac{2}{3}x \; \frac{1}{3}x$	$3x$	x
2ª rodada	x	$3x - \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}x \; \frac{1}{3}x$	$3x$
final	$3x$	x	$3x - 2x - \frac{2}{3}x \; \frac{1}{3}x$

André, José e Miguel terminarão o jogo com a mesma quantidade de bolinhas que possuíam inicialmente. 3

5.4. Questão B.a

Desempenho - 0%

5a $y = y(x) = (100-15)10^{-0,2x} + 15$.

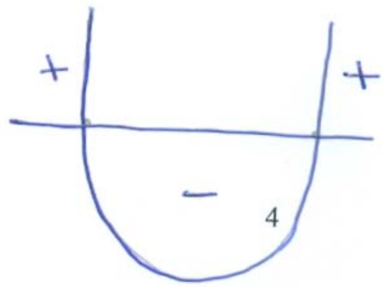
$y = y(x) = 85.10^{-0,2x} + 15$.

$y = y(x) = 850^{-0,2x} + 15$.

$y = y(x) = 835^{-0,2x}$

a) $\boxed{y = y(x) = 835^{-0,2x}}$

Gráfico



4

Ou

100 sendo $X \geq 0$

$X \geq 0$

a) $y = y(x) = (100 - a)\,10^{-kx} + a$

$\boxed{y = y(1) = (100 - 15)\,10^{-0,2.1} + 15}$

Desempenho - 25%

Ba) Substituindo temos:

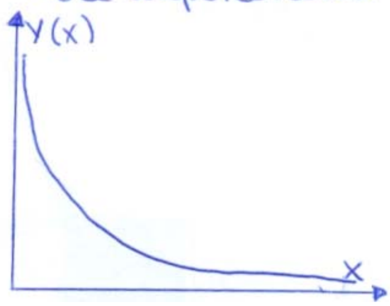
$y(x) = (100 - a)\,10^{-kx} + a$

$y(x) = (100 - 15).10^{-0,2.x} + 15$

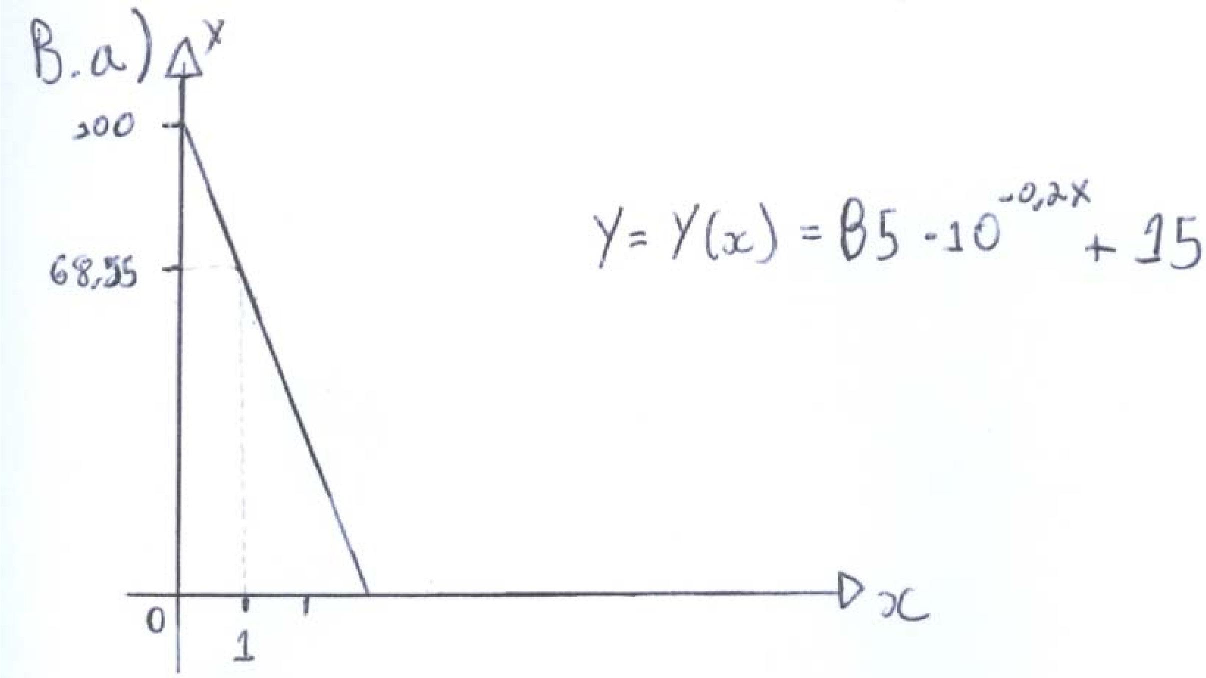
$y(x) = 85.10^{-0,2x} + 15$

$\boxed{y(x) = 850^{-0,2x} + 15}$

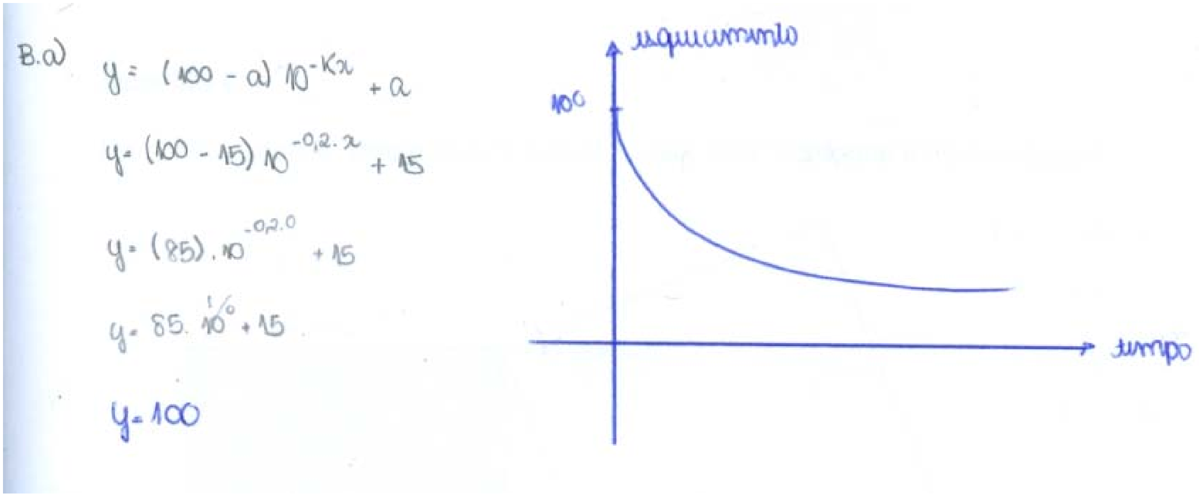
Tratando-se de uma função exponencial o gráfico esboçado caracteriza-se por uma curva exponencial



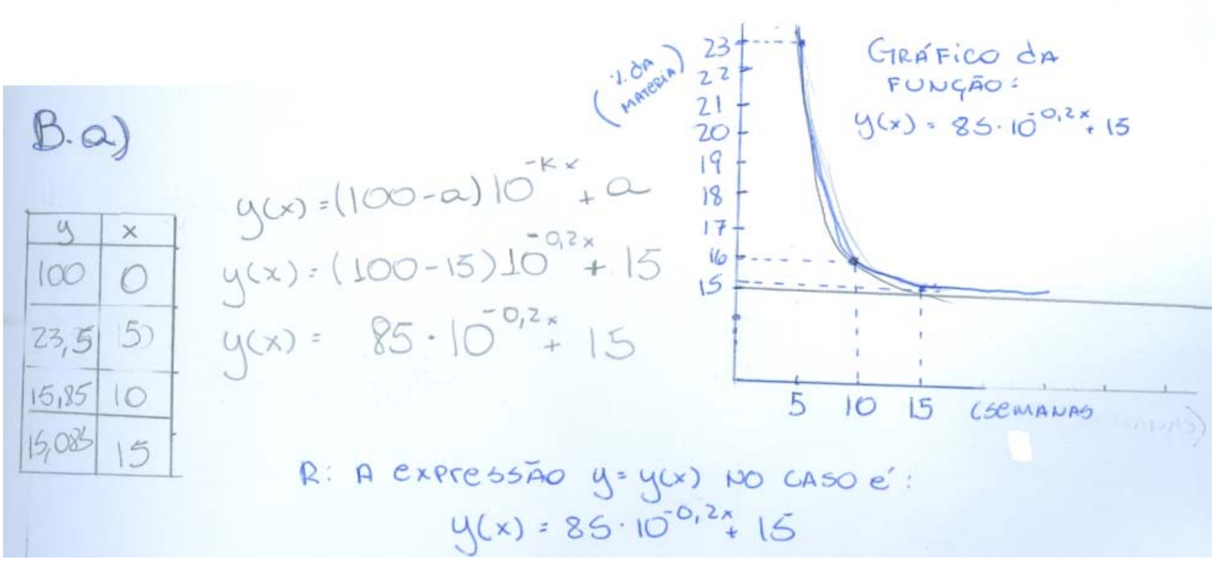
Desempenho - 50%



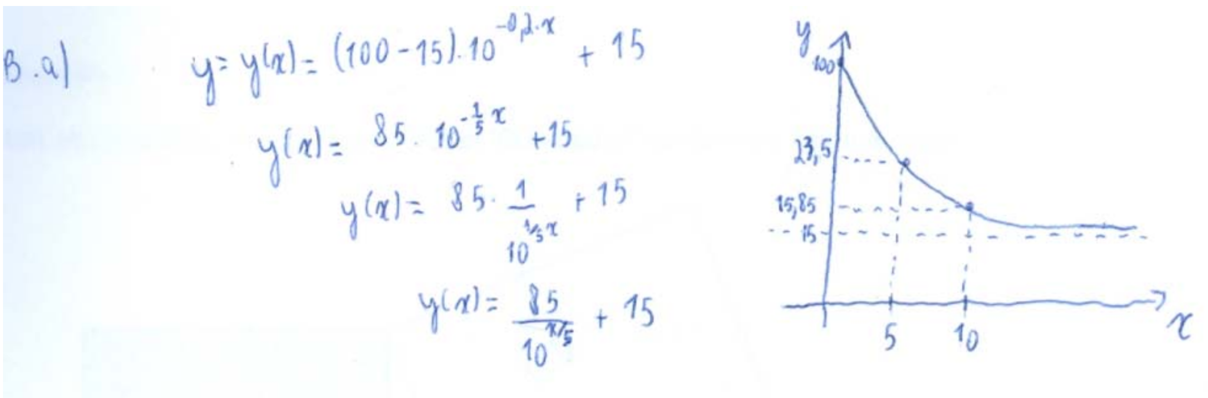
Desempenho - 75%



Desempenho - 100%



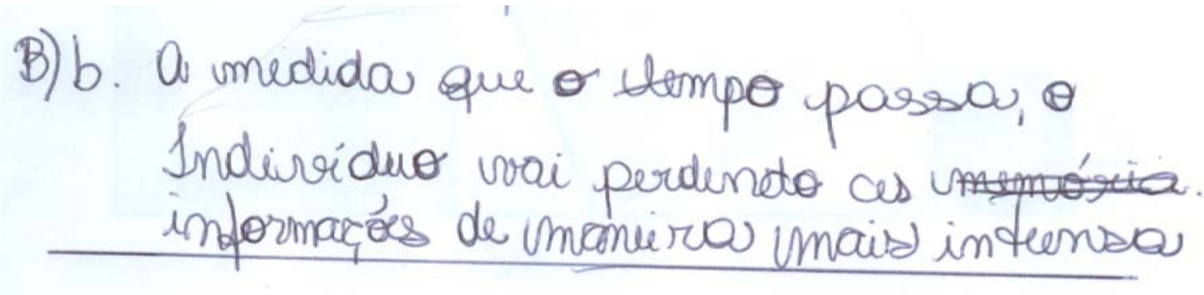
Ou



Ou

5.5. Questão B.b

Desempenho - 0%



B) b. A medida que o tempo passa, o Individuo vai perdendo as ~~memória~~. informações de maneira mais intensa

Ou

B.b) A medida que o x fica maior o índice de retenção ficará menor, esse menor grau de retenção foi denominada como "curva do esquecimento" que vai aumentando conforme o tempo do aprendizado, sendo, portanto, grandezas proporcionais.

Ou

B.b) Explique, a partir da função obtida no subitem B.a, o que ocorre à medida que o tempo passa. (5) A medida que o tempo passa a expressão fica negativa.

Desempenho - 25%

B.b) A medida em que o tempo torna-se maior, desde o aprendizado da matéria, a tendência é a de diminuição da ~~(ilegível)~~ retenção de tal informação. A partir do gráfico, percebe-se que quanto maior é o tempo (X), menor será a memória da informação (Y(X)).

Desempenho - 50%

B.b) À medida que o tempo passa, a porcentagem da matéria de que o estudante pode se lembrar diminui.

Desempenho - 75%

B.b) A medida que o tempo passa, a tendência é de o estudante se lembrar apenas de 15% daquilo que aprendeu.

Desempenho - 100%

B.B) a medida que o tempo passa, a quantidade de matéria que o estudante se lembra é menor. Entretanto, no mínimo 15% da matéria será sempre lembrada.

5.6. Questão B.c

Desempenho - 0%

B-c) a partir da constante do sistema, ~~o~~ ~~constante após~~ percentual de retenção é de cerca de 25% aproximadamente.

Ou

B.c) A partir da função, quando x é igual a 1 o valor de y(x) é:

$$\cancel{y(1) = 850^{-0,2x}} \quad y(1) = 850^{-0,2 \cdot 1} + 15$$

Substituindo-se a expressão (-0,2) por log 0,63 temos:

$$y(1) = 850^{\log 0,63} + 15$$

Desempenho - 25%

$$B.c)\ y(1) = (100 - 15) \cdot 10^{-0,2 \cdot 1} + 15$$

$$y(1) = 85 \cdot 10^{-\frac{2}{10}} + 15$$

$$y(1) = 85 \cdot 10(10)^{-2} + 15$$

$$y(1) = 85 \cdot 10 \left(\frac{1}{10}\right)^{2} + 15$$

$$y(1) = 85 \cdot \frac{1}{10} + 15$$

$$y(1) = 8,5 + 15$$

$$y(1) = 23,5$$

Desempenho - 50%

c) $y = y(1) = (100-15).\, 10^{-\frac{1}{5}} + 15$

$= 85.\frac{1}{\sqrt[5]{10}} + 15$

$\sqrt[5]{10} \simeq 1,3$

$= 85.0,7 + 15$

$= 59,5 + 15$

$y \cong 75$

Cerca de 75% de retenção.

Ou

B.c) $y(1) = (85)10^{-0,2.1} + 15$

$y(1) = (85)0,63 + 15$

$y(1) = 5,355 + 15$

$y(1) = 20,355$

$\log 0,63 = -0,2$

$0,63 = 10^{-0,2}$

O percentual de retenção é 20,355.

Desempenho - 75%

c) $t = x = 1$

$y = (100-15)\ 10^{-0,2.1} + 15$

$y = 85.10^{-0,2} + 15$

$y = 85.\ 63 + 15$

$y = 5355 + 15$

$y = 5370$

$p = \frac{5370}{100} = 53,7\ \%$

$\log 63 = -0,2$

$63 = 10^{-0,2}$

A percentagem é 53,7 %

Ou

B.c)

x	y
1	$85 \cdot 10^{-0,2 \cdot 1} + 15$

$85 \cdot 10^{-0,2} + 15$

$85 \cdot \frac{1}{10^{0,2}} + 15 =$

$85 \cdot 0,63 + 15 = 68,55$

R: O percentual é de 68,55%.

$85 \times 0,63$: 255, 510, $53,55$; $+15,00$: $68,55$

Desempenho - 100%

B.c) $x = 1$

$y(x) = (100 - 15) \cdot 10^{-0,2 \cdot 1} + 15$

$y(x) = 85 \cdot 10^{-0,2} + 15$

como $\log 0,63 \cong -0,2$

$10^{-0,2} = 0,63$

substituindo na equação:

$y(x) = 85 \cdot 0,63 + 15$

$y(x) = 53,55 + 15$

$y(x) = 68,55$

Resposta: O percentual de retenção após uma semana é de 68,55%

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

DIREITO GV
ESCOLA DE DIREITO DE SÃO PAULO

5.7. Questão C.a

Desempenho - 0%

a) A medida do lado do quadro cinza claro é 120 cm.

Desempenho - 25%

C.a) $X^2 = 120^2+50^2$

$X^2 = 14400+2500$

$X^2 = 16900$

$\boxed{X = 130cm}$ → R: O lado do quadrado ~~de~~ [6] cinza ~~[illegible]~~ é de 130 cm.

$$\begin{array}{r} 14400 \\ +\ 2500 \\ \hline 16900 \end{array}$$

Desempenho - 50%

a) Como o lado do quadrado cinza claro é a hipotenusa dos dois triângulos, temos que (para o lado medindo x):

$x^2 = (120^2+50^2)$

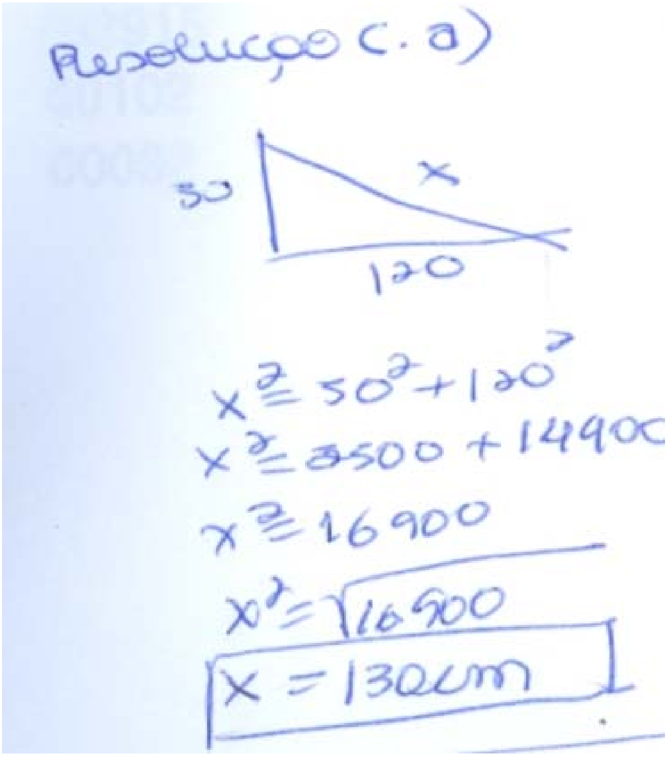
$x^2 = 16900$

$x = \sqrt{16900}$

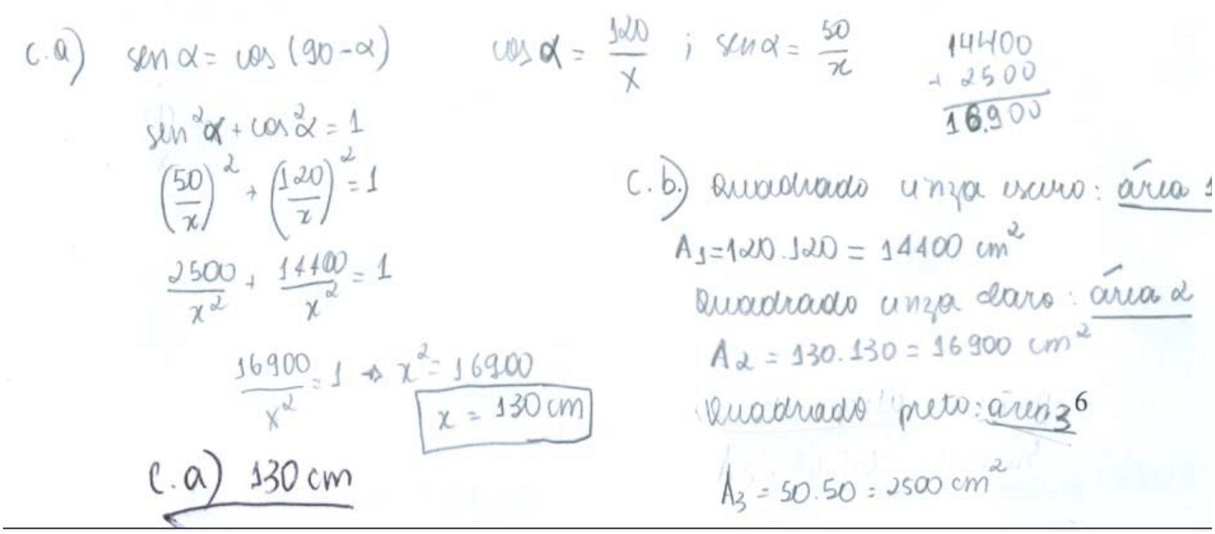
$x = 130m$

C.a) A medida do lado é de 130m

Desempenho - 75%
Além desse esboço o aluno deixou indicado na figura (apresentada na questão) a relação entre os ângulos e lados, indicando a congruência dos triângulos.

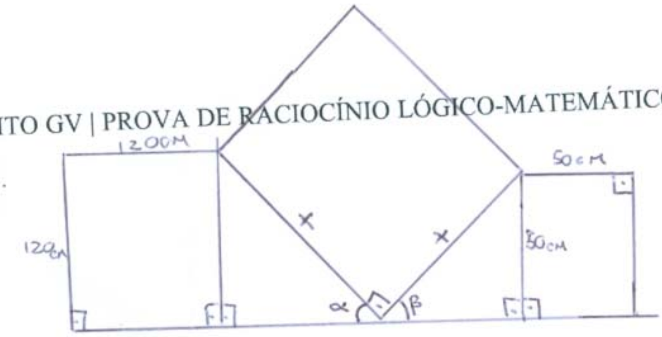


Desempenho - 100%



Ou

C.a)



A partir do desenho podemos concluir que $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + 90° = 180°$ portanto $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90°$. Como no triangulo retangulo formado por o quadrado de lado "x" e o de lado 50cm o angulo que falta é $90° - \hat{\beta}$ então o angulo que falta e igual α. Assim os dois triangulos retangulos são iguais por razão de terem dois angulos iguais, $\hat{\alpha}$ e 90°, mais um lado igual, a hipotenusa é X. Dessa maneira o cateto menor dos dois triangulos é 50cm e o maior tem 120cm. ~~por~~,
pelo teorema de pitagoras: $120^2 + 50^2 = x^2 \rightarrow x = 130$

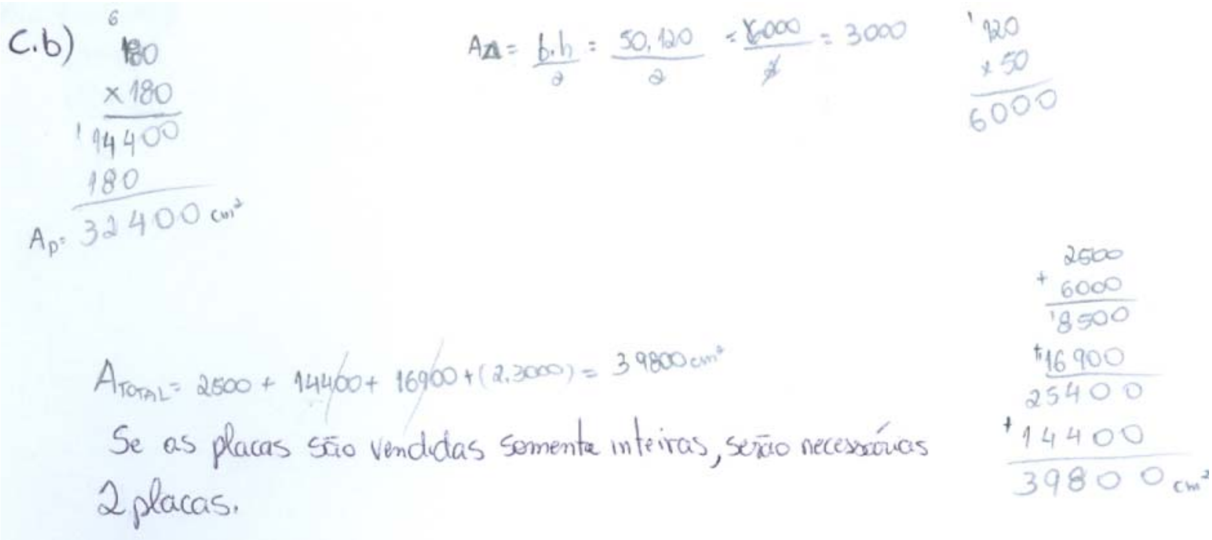
5.8. Questão C.b

Desempenho – 0%

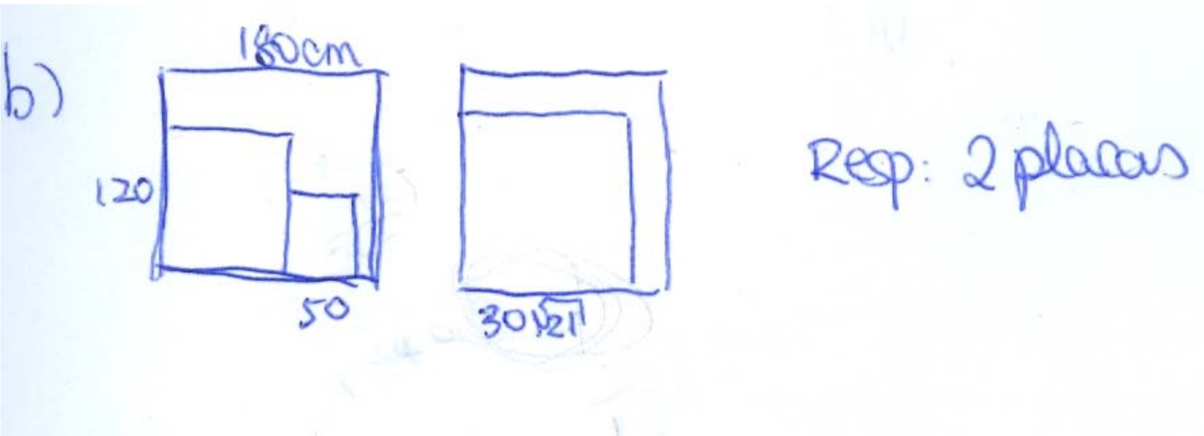
C. b) $120 + 130 + 50 = 300$ cm
180 cm $\times 2 = 360$ cm

Serão necessárias 2 placas inteiras para produzir o painel.

Desempenho - 25%



Desempenho - 50%



FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

DIREITO GV
ESCOLA DE DIREITO DE SÃO PAULO

Desempenho - 75%

b) placas de 1,8m x 1,8m

área das placas = 1,8 x 1,8 = 3,24 m²
(Ap)

área do quadrado cinza escuro ⇒ 1,2 x 1,2 = 1,44 m²
120cm = 1,2m

área do quadrado cinza claro ⇒ 1,3 x 1,3 = 1,69 m²
130cm = 1,3m

área do quadrado preto ⇒ 0,5 x 0,5 = 0,25 m²
50cm = 0,5m

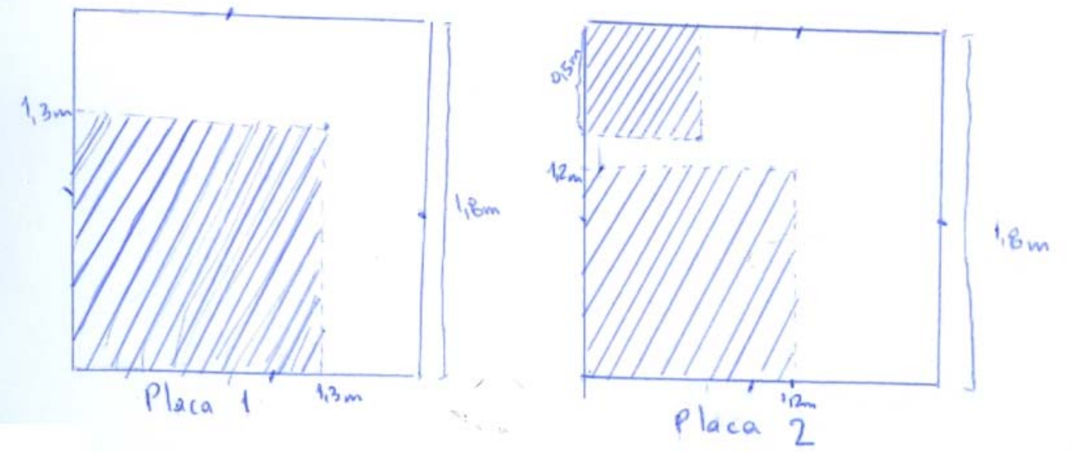
área total do painel = 1,44 + 1,69 + 0,25
$A_T = 3,38\,m^2$

$$\frac{A_T}{A_P} = \frac{3,38}{3,24} \cong 1,043 \text{ placas}$$

R: serão necessárias 1,043 placas aproximadamente.

Desempenho - 100%

C. b) Para confeccionar este painel, o artista necessitará de apenas duas placas. O esquema de utilização segue abaixo



Ou

Cb) Calculando-se, em metros, a área total do ~~quadrado~~ painel montado pelo artista temos:

$A_T = (1,2 \times 1,2) + (1,3 \times 1,3) + (0,5 \times 0,5)$

$A_T = 1,44 + 1,69 + 0,25$

$A_T = 3,38 m^2$

Sabendo que cada placa necessária para a montagem possui área de $3,24 m^2$ ($1,8 m \times 1,8 m$), temos:

1 placa — $3,24 m^2$

X — $3,38 m^2$

$X = \dfrac{3,38 m^2}{3,24 m^2} \rightarrow X \cong 1,04 m^2$

Resposta: Conclui-se portanto que o artista precisará de 2 placas para produzir o painel.

5.9. Questão C.c

Desempenho – 0%

Cc)

$$\begin{array}{r} 338\, m^2 \\ 324\, m^2 \\ \hline 014\, m^2 \end{array} \quad 250 \text{ por } m^2 \qquad \begin{array}{r} 250 \\ \times 14 \\ \hline 1000 \\ 2500 \\ \hline \boxed{3500} \end{array}$$

$\boxed{\text{R: O artista receberia R\$ 3500.}}$

Ou

C. c) 230,00 — 1 m²

x — 0,14 m²

x = 35.00

R: Receberá R$ 35,00 reais

Desempenho - 25%

Cc) Sobrará: 6,48

−3,98

2,50 m²

∴ R$ = 250 . 2,5 ⇒ 625 R$

R: 625 R$

Desempenho - 50%

C) 2placas → 6,40 m²

foram usados → 3,38m²

6,40
3,38
3,02 m²

O metro quadrado 250 reais

1 — 250

3,02 — x → x = 755 reais

O artista receberá 755 reais

Desempenho - 75%

C. c) da 1º placa sobraram: 1,525 m²

da 2º placa sobraram 1,55 m²

∴ o total de sobra é de 3,075 m²

como cada m² custa R$ 250,00:

250 —— 1

x —— 3,075

$\boxed{x = R\$ 768,75}$ //

Ou

c.b) $\underbrace{3,24 + 3,24}_{\text{duas peças necessárias}} \longrightarrow \boxed{6,48 m^2}$

serão utilizados: 3,38 m²

sobrarão: 6,48 - 3,38 = 3,1 m²

1 m² —— R$ 250,00

3,1 —— x

x = 250,00 × 3,1

2500 0

7500 0 +

R$ 7.750,00

Caso o artista venda receberá 7.750 00 reais

Desempenho 100%

C.c.) Sabendo que o artista ~~(utilizará)~~ necessitará da compra de duas placas, sendo cada uma de $3,24 m^2$, sabe-se que ~~(haverá)~~ haverá disponível ao artista $6,48 m^2$ ~~(de)~~ $(3,24 \times 2)$ de placa. No entanto o artista só usará na montagem do painel $3,38 m^2$ (área do painel) das duas placas. Da diferença temos que: $6,48 m^2 - 3,38 m^2 = \boxed{3,10 m^2}$. Sobrará, portanto, $3,10 m^2$ de ~~es~~ placa para o artista vender. Caso ele venda, sabendo que cada metro quadrado vale R$ 250,00, temos: 7

R$ $250,00 \times 3,10 m^2 = 775$ reais.

Resposta: O outro profissional receberá R$ 775,00 pela venda da placa.

5.10. Questão C.d

Desempenho - 0%

d) $805 . 0,2 = 161$ reais no ato

$805 - 161 = 644$ reais

$644 . 0,01 = 6,44$

$644 + 6,44 = 650,44$

$644 + 6,44 = 650,44$

$650,44 : 2 = 325,22$ após 30 dias

$650,44 : 2 = 325,22$

$325,22 + 3,25 = 328,47$ após 60 dias

$161 + 325,22 + 328,47 = 814,69$

$325,22 . 0,01 = 3,25\cancel{22} \rightarrow 3,25$

$3,25 + 325,22 = 328,47$

R: Pagará R$ 814,69

Ou

d) $1\cancel{0}0\% — 112,50 \rightarrow 10x = 2(112,50)$
$2\cancel{0}\% — x$
$x = \frac{\cancel{2}(112,50)}{\cancel{1}0} \rightarrow \frac{112,5}{5} = 22,50$ reais

Parcelará 90 reais em 3 meses c/ juros 1%
1º mês = 99 reais
2º mês = 108,9 reais } porém pagou 50% no mês 1º = 48 reais
3º mes = 119,79 reais
e no 2º mês = 52,8
3º mês = 58,08 reais

No total pagou 128,58 reais pois pagou 22,50 à vista, no primeiro mês 48 reais e ao término do 3º mês 58,08

Desempenho - 25%

d) 775 x 0,2 = 155,00
775,00 - 155,00 = 620,00
1º mês → 310,00 x 1,1 = 341,00
2º mês → 341,00 x 1,1 = 375,10
155,00 + 341,00 + 375,10 = 871,10
O comprador pagará 871,10 reais.

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

DIREITO GV

ESCOLA DE DIREITO DE SÃO PAULO

Desempenho - 50%

C. d)

pago no ato ⇒ $\boxed{\text{R\$ 143,74}}$ (20% do total)

∴ sobram R$ 625,00 parcelados em dois meses à juros de 1% a.m. $\xrightarrow[\text{1º mês}]{\text{após o}}$ saldo devedor de $\boxed{\text{R\$ 631,25}}$ $\xrightarrow[\text{2º mês}]{\text{após o}}$ saldo devedor de R$ 318,77 → saldo 0.

pagamento da 1ª parcela $\boxed{\text{R\$ 315,62}}$ (50% do valor)

pagamento da parcela final de $\boxed{\text{R\$ 318,77}}$.

143,74
315,62
318,77
$\boxed{778,13}$

R: No total, o artista pagará R$ 778,13.

Ou

c d) 20% de R$ 775,00

R$ 775 — ~~100~~ 5 %

x — ~~20~~ %

5x = 775

x = R$ 155,00

Restante: R$ 775,00 - R$ 155,00 = R$ 620,00

Pagará 50% do valor devido ao término do 1º mês = R$ 310,00 com juros de 1% ao mês = R$ 313,10

no segundo mês pagará R$ 310,00 com mais 1% de juros. R$ 313,10

Total do valor pago: R$ 155,00 + R$ 313,10 + R$ 313,10 = R$ 781,20

Desempenho - 75%

C.D.) Pagará no ato: 0,2 · 775~~00~~ = 155~~00,00~~
Sobrará para pagar = ~~620 000,00~~ 6200,00
o resto dividido em 2 parcelas = ~~310 000,00~~ 3100,00
Na 1ª parcela pagará: ~~31~~ $\frac{6200 \cdot 0{,}01 + 6200}{2} = \frac{6262{,}00}{2}$
= 3131,00
Na 2 parcela pagará = ~~31,3~~ 3131 · 1,01 = 3162,31
No total: 1550 + 3131 + 3162,31 = 7843,31
Resposta: Pagará no total 7843,31 reais

Desempenho - 100%

d) 775,00 — 100%
x — 20%
15500,00 = 100x
x = 155,00

620,00 — 100%
x — 1%
x = 6,20

620 + 6,20 = 626,20 — 100%
x — 50%
x = 313,10 — 100%
x — 1%
x = 3,131
313,10 + 3,131 = 316,231

775,00
−155,00
620,00 — 30 e 60 dias
juros 1% ao mês
50% do valor devido no final do 1º mês
Na hora - 155,00 reais
30 dias - 313,100 reais
60 dias - 316,231 reais

Total ≅ 784,33 reais

No total, ele pagará 784,33 reais.